E C. MOISIL

spre logica raționamentului nuanțat

editura științifică și enciclopedică

GRIGORE C. MOISIL

Lecţii despre logica raţionamentului nuanţat

Editura ştiinţifică şi enciclopedică
Bucureşti, 1975

Ediție îngrijită de prof. univ. S. MARCUS

Coperta de KÈRRY EUGEN

Redactor MARIA BORICEAN

Tehnoredactor CONSTANTIN IORDACHE

CUVÎNT ÎNAINTE

Așa cum rezultă și din prefața autorului, cartea de față conține textul conferințelor ținute în cadrul Centrului internațional de semiotică și lingvistică al Universității din Urbino, Italia, în mai 1972. Conferințele au fost ținute în limba franceză și tot în această limbă au fost redactate de către autor în vederea publicării. Versiunea românească a textului este datorată Alexandrei Strătilă și a fost revăzută și corectată de către noi. Caracterul mai elementar al unor părți ale textului se explică prin faptul că participanții la stagiile Centrului internațional de semiotică de la Urbino sînt, în marea lor majoritate, studenți sau cercetători de formație umanistă, neobișnuiți cu stilul expunerilor cu o structură logică mai riguroasă.

În ultima vreme, s-a produs o intensificare a cercetărilor privind mulțimile și conceptele vag definite și aplicațiile lor în cele mai variate domenii. Pentru a da un exemplu dintre cele mai recente, vom menționa Seminarul americano-japonez asupra mulțimilor vagi în sensul lui Zadeh (*fuzzy-sets*), organizat în iulie 1974 de către Universitatea din California. În cadrul acestui seminar s-au prezentat cîteva zeci de referate și comunicări privind rolul mulțimilor vagi în topologie, teoria grafurilor, teoria limbajelor formale, teoria automatelor, teoria măsurii, teoria deciziei și controlului, teoria programării, teoria informației, recunoașterea automată a formelor, planificarea automată, teoria algoritmilor, teoria clasificării, psihologie (cu privire specială la procesele de memorare, uitare și inferență), teoria rețelelor de neuroni. De asemenea, la Congresul internațional de semiotică (Milano, iunie 1974) s-au prezentat unele aplicații ale mulțimilor vagi în semiotică. Recent au fost publicate expuneri monografice asupra teoriei lui

Zadeh; avem în vedere cartea lui A. Kaufmann apărută în Franţa şi cartea lui C. V Negoiţă şi D. A. Ralescu, *Mulţimi vagi şi aplicaţiile lor*, apărută la Bucureşti. Punctul de vedere al prof. Gr. C. Moisil, bazat pe logica cu mai multe valori, la a cărei dezvoltare a contribuit în mod esenţial, se racordează cu cel al lui Zadeh, prin aceea că ideea de *fuzzy-set* este considerată ca extensiune a unui predicat în logica cu o infinitate continuă de valori (numerele reale cuprinse între 0 şi 1), logică faţă de care logicile lui Lukasiewicz cu un număr finit de valori sînt doar nişte aproximaţii. Dealtfel, acest punct de vedere fusese deja schiţat de către autor în unele articole anterioare. Originalitatea acestui punct de vedere, care reţine, din structura conceptelor vagi, nu atît aspectul impreciziei, ci mai mult pe cel al nuanţării, a fost recunoscută de către specialişti, aşa cum rezultă şi din prefaţa cărţii lui A. Kaufmann.

Concomitent cu lecţiile de faţă, se publică în Italia (Accademia Nazionale dei Lincei, Contributi del Centro Linceo Interdisciplinare di Scienze Matematiche e loro applicazioni, Roma, 1975) articolul prof. Grigore C. Moisil *Sur l'emploi des mathématiques dans les sciences de l'homme*, articol care dezvoltă două conferinţe ţinute de autor la Roma în mai şi iunie 1972. Cu acest prilej, Gr. C. Moisil observă că deosebirea dintre *fuzzy-ness* şi *random-ness* rezolvă dificultatea filozofică a interpretării probabiliste a logicilor cu mai multe valori ale lui Lukasiewicz, se atrage, de asemenea, atenţia că unele cercetări în aparenţă fără legătură cu mulţimile şi conceptele vagi, cum ar fi preocuparea lui Tomovič de a construi o proteză care să simuleze mişcările unui picior, se subsumează în fapt logicii raţionamentelor nuanţate.

Logica raţionamentelor nuanţate se adaugă ca o contribuţie importantă la diferitele strategii prin care ştiinţa modernă încearcă să abordeze fenomenele atît de complexe şi de fluctuante ale domeniilor actuale de cercetare. Ştiinţele umaniste şi sociale, atît de bogate în fenomene care comportă un număr mare de ipostaze şi depind de un mare număr de parametri, au cu deosebire a profita de pe urma folosirii acestui instrument.

Menţionăm, în încheiere, ajutorul dat de către prof. Cristian Calude la realizarea cărţii de faţă.

SOLOMON MARCUS

PREFAȚĂ

Expunerea de față conține conferințele ținute la Centrul internațional de semiotică și lingvistică de la Urbino, în luna mai 1972.

Lingviștii și în general cei care se ocupă de științele umaniste nu mînuiesc decît rareori concepte pentru care există o procedură de a decide între cele două afirmații:

a este A sau a nu este A.

Nu li se întîmplă să se îndoiască de legile logicii tradiționale: principiul terțului exclus și principiul contradicției, nici de ideea de identitate ca indiscernabilitate absolută; dar li se întîmplă să se îndoiască de posibilitatea de a folosi un tip de raționament în care rigoarea și exactitudinea se aseamănă cu cele ale matematicii. Noi încercăm să ne situăm pe o poziție contrară acestei atitudini: nu renunțăm nici la rigoare, nici la matematică, dar întrebuințăm logici în care ideea clasică de identitate și principiile terțului exclus și al contradicției nu sînt valabile.

Existența logicilor în care legile logicii clasice nu sînt valabile a fost descoperită în urmă cu o jumătate de secol de J. Lukasiewicz. Ea a făcut obiectul cercetărilor Școlii poloneze între cele două războaie: A. Tarski, M. Wajsberg, J. Slupecki; acestea sînt logicile cu mai multe valori; logica propozițiilor cu mai multe valori, așa cum a fost ea dezvoltată de Școala poloneză, pleacă de la doi conectori: implicația și negația, definite de Lukasiewicz pentru cazul cu mai multe valori. M. Wajsberg a dezvoltat amplu logica propozițiilor pentru cazul trivalent, J. Slupecki a introdus un nou conector pentru acest caz; J. J. B. Rosser și A. Turquette au reușit să arate posibilitatea unei axiomatizări complete în cazul n-valent.

Cu treizeci de ani în urmă, am început studiul algebric al modelelor logicilor cu trei sau cu un număr finit de valori, definind algebrele pe care le-am numit lukasiewicziene: trivalente, n-valente. Studiul algebrelor sugerate de lucrarea lui E. Post, aproape contemporană celei a lui J. Lukasiewicz, dar care întrebuințează conectori fără semnificație și greu de mînuit, s-a dovedit foarte util în metalogică, dar nefecund în algebră și fără interpretare în logică.

Ceea ce ne lipsea în primul rînd erau exemplele de propoziții cu mai multe valori. N-am reușit să găsim și să studiem asemenea exemple decît studiind teoria circuitelor de comutare cu contacte și relee.

Școala de la Bahia Blanca a fost aceea care, sub impulsul lui A. Monteiro, a reluat cercetările asupra algebrelor lukasiewicziene polivalente; cităm importantele studii ale lui A. Monteiro și ale lui Luiz Monteiro, precum și frumoasa teză a lui R. Cignoli.

Tineri matematicieni români, printre care citez pe Cornel Sicoe, mort foarte tînăr, au publicat cercetări asupra acestor algebre; G. Georgescu, în teza sa, a știut să întrebuințeze teoria categoriilor pentru a obține rezultate interesante asupra algebrelor lukasiewicziene. El a știut de asemenea să antreneze cîțiva colegi și să-i intereseze în aceste probleme.

Dacă studiul logicii polivalente a propozițiilor putea să se dezvolte în direcțiile astfel trasate, logica predicatelor cu mai multe valori nu introducea nici o dificultate nouă, dar lipsa sa de interes, dată fiind lipsa de exemple de propoziții cu mai multe valori, părea evidentă.

Un ajutor foarte important ne-a fost oferit de ideea de *fuzzy-set*, dată de L. Zadeh. Am remarcat că această idee putea fi înțeleasă ca „extensia unui predicat în logica cu o infinitate de valori" Aceasta dădea o semnificație logicii cu o infinitate de valori și această semnificație putea interesa, după cum remarcase L. Zadeh, un domeniu al tehnicii: teoria automatelor și teoria sistemelor. Logicile cu un număr finit de valori puteau fi concepute ca aproximări ale unei logici cu o infinitate de valori.

Totuși, dezvoltînd studiul logicii predicatelor și relațiilor în cazul polivalent, ne-am lovit de o dificultate care ne-a părut foarte importantă. Propozițiile de identitate:

$$a = b$$

nu puteau avea decît două valori. Această dificultate a identității întîmplătoare fusese de asemenea întîlnită în logica modală a lui C. I. Lewis.

Numai studiind teoria clasificării automate am înțeles care este calea de urmat pentru construirea unei teorii a predicatelor în logica cu mai multe valori, teorie care să cuprindă și identitatea. Prezentele lecții au fost elaborate pentru înțelegerea acestei direcții: identitatea, în logica cu mai multe valori, nu este decît o clasificare.

Or, aceasta ne-a condus la înțelegerea dificultăților întîlnite de aceia care ar fi vrut să întrebuințeze matematica, dar care aveau de a face cu concepte prost definite: *fuzzy*, nuanțat, precum și dificultățile filozofice de care se loveau cei care întrebuințau statistica în studiul fenomenelor necantitative.

Necesitatea pe care am simțit-o întotdeauna de a traduce într-o limbă naturală formulele logicii matematice, pentru a stabili interpretările în stilul logicii tradiționale a rezultatelor obținute prin logica simbolică, ne-au convins că limbile naturale nu sînt suficient de bogate pentru disecarea polisemiilor care nu apar explicit decît în limbile simbolice. Acesta este motivul pentru care am insistat în aceste lecții asupra ajutorului pe care întrebuințarea simbolismului matematic îl poate aduce la lămurirea ideilor.

Gr. C. MOISIL

Martie 1973

Capitolul I

JUDECĂŢILE PREDICAŢIEI

§1. Predicaţia în logica bivalentă

Propoziţia

individul a are

proprietatea A

va fi scrisă

$$A(a).$$

În logica bivalentă orice propoziţie poate avea una dintre două valori logice

adevărul care va fi notat 1,

falsul care va fi notat 0.

Numind

$$V_{II}(p)$$

valoare logică a propoziţiei p şi

$$L_2 = \{0,1\}$$

mulţimea cu două elemente 0,1 avem

$$V_{II}(A(a)) \in L_2.$$

Numind

$$\{x \mid A(x)\}$$

mulţimea formată din toate elementele x care au proprietatea A, vedem că orice predicat A împarte mulţimea I a tuturor indivizilor în două părţi:

$$\mathbf{a} = \{x \mid V_{II}(A(x)) = 1\};$$

$$\bar{\mathbf{a}} = \{x \mid V_{II}(A(x)) = 0\},$$

adică

a este mulţimea tuturor elementelor x care au proprietatea A;

ā este mulţimea tuturor elementelor x care nu au proprietatea A.

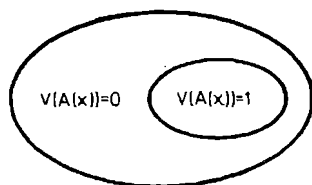


Fig. 1

Vom introduce funcţia caracteristică predicatului A,

$$f_A : I \rightarrow L_2,$$

definită prin

$$f_A(x) = V_{II}(A(x)).$$

§2. Predicaţia în logica trivalentă

În logica trivalentă, fie

$$L_3 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

mulţimea valorilor logice,

$$V_{III}(A(a)) \in L_3.$$

Semnele 0, $\frac{1}{2}$, 1 n-au nici o semnificaţie (vezi cap. II).

Mulţimea indivizilor este împărţită în trei părţi.

Introducînd funcţia caracteristică predicatului A,

$$f_A \quad I \rightarrow L_3,$$

definită prin

$$f_A(x) = V_{III}(A(x)),$$

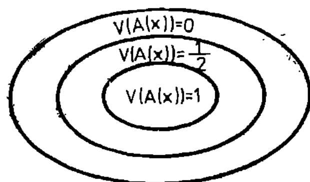


Fig. 2

aceste părţi corespunzînd celor trei valori ale lui $f_A(x)$ Vom numi

$$\mathbf{a}_1 = \left\{x \mid V_{III}(A(x)) \geqslant \frac{1}{2}\right\};$$

$$\mathbf{a}_2 = \{x \mid V_{III}(A(x)) = 1\},$$

deci

$$\mathbf{a}_1 \supset \mathbf{a}_2. \qquad (*)$$

Deci în logica trivalentă fiecărui predicat A îi este asociată o pereche de mulţimi

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1\}$$

legate prin (*) ; o asemenea pereche va fi numită *mulţime nuanţată*. Vom introduce relaţia de *apartenenţă nuanţată*, care este o relaţie între un individ a şi o mulţime nuanţată $\mathcal{A}$,

$$a \,\varepsilon\, \mathcal{A},$$

exprimată printr-o pereche de propoziţii de apartenenţă ordinară:

$$a \in \mathbf{a}_2, \qquad a \in \mathbf{a}_1.$$

Propoziţia $a \varepsilon \mathcal{A}$ *are trei valori*

$$V_{III}(a \varepsilon \mathcal{A}) = 1 \quad \text{dacă} \quad a \in \mathbf{a}_2;$$

$$V_{III}(a \varepsilon \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \quad \text{dacă} \quad a \in \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2;$$

$$V_{III}(a \varepsilon \mathcal{A}) = 0 \quad \text{dacă} \quad a \notin \mathbf{a}_1.$$

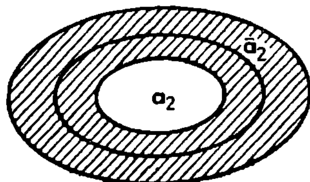


Fig. 3

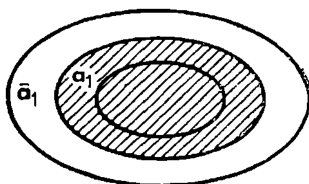


Fig. 4

Putem introduce două relații de apartenență modală ε_1 și ε_2 prin

$$a\varepsilon_1\mathcal{A} \quad \text{înseamnă} \quad a \in \mathbf{a}_1;$$

$$a\varepsilon_2\mathcal{A} \quad \text{înseamnă} \quad a \in \mathbf{a}_2.$$

Propozițiile $a\varepsilon_1\mathcal{A}$, $a\varepsilon_2\mathcal{A}$ *nu au decît două valori*; vom introduce *propozițiile de non-apartenență modală*

$$a\bar{\varepsilon}_1\mathcal{A} \quad \text{ceea ce înseamnă} \quad a \notin \mathbf{a}_1;$$

$$a\bar{\varepsilon}_2\mathcal{A} \quad \text{ceea ce înseamnă} \quad a \notin \mathbf{a}_2,$$

care, de asemenea, nu au decît două valori. Iată corespondența valorilor acestor propoziții:

$V_{III}(A(a))$	$a\varepsilon\mathcal{A}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$a\varepsilon_1\mathcal{A}$	$a \in \mathbf{a}_1$	0	1	1
$a\varepsilon_2\mathcal{A}$	$a \in \mathbf{a}_2$	0	0	1
$a\bar{\varepsilon}_1\mathcal{A}$	$a \notin \mathbf{a}_1$	1	0	0
$a\bar{\varepsilon}_2\mathcal{A}$	$a \notin \mathbf{a}_2$	1	1	0

Propozițiile care nu au decît două valori vor fi numite *chrisipiene*.

Deci:

În mulțimea I (vom spune: „în model") vom considera mulțimile $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ și relația $\in$, propozițiile $a \in \mathbf{a}_1$, $a \in \mathbf{a}_2$, perechile de mulțimi $<\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1>$ și perechile de propoziții $<a \in \mathbf{a}_2,\ a \in \mathbf{a}_1>$.

În logica trivalentă (vom spune „în limbaj") propozițiile sînt $A(a)$, $a\varepsilon\mathcal{A}$, $a\varepsilon_1\mathcal{A}$, $a\varepsilon_2\mathcal{A}$, $a\bar{\varepsilon}_1\mathcal{A}$, $a\bar{\varepsilon}_2\mathcal{A}$ (ultimele patru neputînd avea decît două valori logice); se consideră de asemenea perechile de propoziții $<a\varepsilon_2\mathcal{A},\ a\varepsilon_1\mathcal{A}>$ și $<a\bar{\varepsilon}_2\mathcal{A},\ a\bar{\varepsilon}_1\mathcal{A}>$.

§3. Predicaţia în logica n-valentă

În limbajul n-valent, fie

$$L_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \quad . \, ., \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$$

mulţimea valorilor logice; propoziţia

$$A(a)$$

poate avea n valori logice

$$V_n(A(a)) \in L_n.$$

Mulţimea indivizilor I este împărţită în n părţi după valorile luate prin funcţia caracteristică

$$f_A(x) = V_n(A(x)),$$

care este o funcţie

$$f_A \colon I \to L_n.$$

Semnele $0, \frac{1}{n-1} \qquad \frac{n-2}{n-1}$, 1 n-au nici o semnificaţie (vezi cap. II).

Considerăm următoarele n mulţimi:

$$\mathbf{a}_1 = \left\{x \mid V_n(R(x)) \geqslant \frac{1}{n-1}\right\}$$

$$\mathbf{a}_2 = \left\{x \mid V_n(A(x)) \geqslant \frac{2}{n-1}\right\}$$

$$\cdots$$

$$\mathbf{a}_{n-1} = \{x \mid V_n(A(x)) = 1\},$$

care sînt în relaţia

$$\mathbf{a}_1 \supset \mathbf{a}_2 \supset \qquad \supset \mathbf{a}_{n-1}. \qquad (*)$$

În logica n-valentă, fiecărui predicat A îi este asociat un sistem de n mulţimi

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{a}_{n-1}, \ldots, \mathbf{a}_1 \rangle$$

legate prin (*); un asemenea sistem va fi numit o *mulţime*

*nuanțată** Vom introduce relația de *apartenență nuanțată*,

$$a\varepsilon\mathfrak{A},$$

exprimată printr-un sistem de $n - 1$ propoziții de apartenență ordinară

$$< a \in \mathbf{a}_{n-1}, \quad ., \; a \in \mathbf{a}_1 >.$$

Propoziția $a\varepsilon\mathfrak{A}$ *are* n *valori logice*

$$V_n(a\varepsilon\mathfrak{A}) = 1 \quad \text{dacă} \quad a \in \mathbf{a}_{n-1};$$

$$V_n(a\varepsilon\mathfrak{A}) = \frac{n-2}{n-1} \quad \text{dacă} \quad a \in \mathbf{a}_{n-2} - \mathbf{a}_{n-1};$$

$$V_n(a\varepsilon\mathfrak{A}) = \frac{1}{n-1} \quad \text{dacă} \quad a \in \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2;$$

$$V_n(a\varepsilon\mathfrak{A}) = 0 \quad \text{dacă} \quad a \notin \mathbf{a}_1.$$

Vom introduce propozițiile *de apartenență modală* construite cu relațiile de apartenență modală $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$:

$a\varepsilon_1\mathfrak{A}$ ceea ce înseamnă $a \in \mathbf{a}_1$;

$a\varepsilon_2\mathfrak{A}$ ceea ce înseamnă $a \in \mathbf{a}_2$;

$a\varepsilon_{n-1}\mathfrak{A}$ ceea ce înseamnă $a \in \mathbf{a}_{n-1}$,

și propozițiile de non-apartenență modală

$a\bar{\varepsilon}_1\mathfrak{A}$ ceea ce înseamnă $a \notin \mathbf{a}_1$;

$a\bar{\varepsilon}_2\mathfrak{A}$ ceea ce înseamnă $a \notin \mathbf{a}_2$;

$a\bar{\varepsilon}_{n-1}\mathfrak{A}$ ceea ce înseamnă $a \notin \mathbf{a}_{n-1}$.

---

* Remarcăm că perechea de cuvinte

mulțime nuanțată

nu este formată dintr-un substantiv „mulțime" și un adjectiv „nuanțată", căci o „mulțime nuanțată" nu este o „mulțime" ci o „pereche de mulțimi" Expresia „mulțime nuanțată" ar trebui scrisă într-un singur cuvînt

mulțimenuanțată.

Iată, în rezumat, valoarea acestor propoziții:

$V_n(A(a))$	$a\varepsilon\mathcal{A}$	0	$\frac{1}{n-1}$	$\frac{n-2}{n-1}$	1
$a\varepsilon_1\mathcal{A}$	$a \in \mathbf{a}_1$	0	1	1	1
$a\varepsilon_2\mathcal{A}$	$a \in \mathbf{a}_2$	0	0	1	1
$a\varepsilon_{n-1}\mathcal{A}$	$a \in \mathbf{a}_{n-1}$	0	0	0	1
$a\bar{\varepsilon}_1\mathcal{A}$	$a \notin \mathbf{a}_1$	1	0	0	0
$a\bar{\varepsilon}_{n-1}$	$a \notin \mathbf{a}_{n-1}$	1	1	1	0

Propozițiile $a\varepsilon_1\mathcal{A}, \ldots, a\varepsilon_{n-1}\mathcal{A}, a\bar{\varepsilon}_1\mathcal{A}, \ldots, a\bar{\varepsilon}_{n-1}\mathcal{A}$ sînt propoziții chrisipiene în logica n-valentă, relativ la mulțimea nuanțată $\mathcal{A}$.

Propozițiile $a \in \mathbf{a}_{n-1}, \ldots, a \in \mathbf{a}_1$ sînt propoziții în logica bivalentă, relativ la mulțimile ordinare $\mathbf{a}_{n-1}, \ldots, \mathbf{a}_1$.

§4. Predicația în logicile L_λ-valente

Fie

$$L_\lambda = \{x \mid x \text{ număr real și } 0 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

Vom presupune că o propoziție

$$A(a)$$

poate avea ca valoare logică orice număr real cuprins între 0 și 1

$$V_\lambda(A(a)) \in L_\lambda.$$

Mulțimea I a indivizilor este împărțită în submulțimi care vor fi numite curbe de indiferență* fiecare dintre curbe fiind mulțimea punctelor pentru care

$$V_\lambda(A(a)) = \text{const.}$$

* Cuvîntul curbă de indiferență este împrumutat din economie, fiecare dintre mulțimile numite „curbă de indiferență" este o mulțime oarecare.

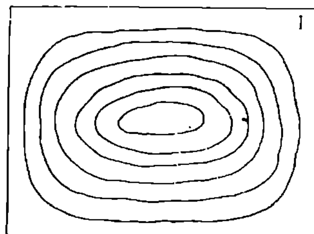


Fig. 5

Vom considera mulţimea mulţimilor

$$\mathbf{a}_{\alpha-} = \{x \mid V_\lambda(A(x)) \geqslant \alpha\};$$
$$\mathbf{a}_{\alpha+} = \{x \mid V_\lambda(A(x)) > \alpha\}.$$

Este uşor de observat că avem

I. $\mathbf{a}_{\alpha+} \subset \mathbf{a}_{\alpha-}$;

II. dacă $\alpha < \beta$, atunci

$$\mathbf{a}_{\beta-} \subset \mathbf{a}_{\alpha+}.$$

Fiecărui predicat A îi vom asocia o mulţime de mulţimi

$$\{a_{\mathfrak{a}}\},$$

indicele $\mathfrak{a}$ luînd ca valori perechile $< \alpha, + >$, $< \alpha, - >$, în care α este un număr real $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, unde în $< \alpha, + >$ avem $\alpha \neq 1$, şi în $< \alpha, - >$ avem $\alpha \neq 0$, satisfăcînd condiţiile I şi II. O asemenea mulţime de mulţimi va fi numită *mulţime nuanţată*. Vom introduce relaţia *de apartenenţă nuanţată*

$$a \varepsilon_{\mathfrak{a}} \mathfrak{A}$$

a unui individ a la mulţimea nuanţată $\mathfrak{A}$, propoziţia $a \varepsilon_{\mathfrak{a}} \mathfrak{A}$ avînd ca valoare logică

$$V_\lambda(a \varepsilon_{\mathfrak{a}} A) = \alpha \quad \text{dacă} \quad a \in \mathbf{a}_{\alpha-} - \mathbf{a}_{\alpha+}.$$

Vom introduce propoziţiile de *apartenenţă modală* construite cu relaţiile de apartenenţă modală $\varepsilon_{\alpha+}$ şi $\varepsilon_{\alpha-}$ definite prin

$$a \varepsilon_{\alpha+} \mathfrak{A} \quad \text{înseamnă} \quad a \in \mathbf{a}_{\alpha+};$$

$$a \varepsilon_{\alpha-} \mathfrak{A} \quad \text{înseamnă} \quad a \in \mathbf{a}_{\alpha-}$$

şi propoziţiile de non-apartenenţă modală $a\bar{\varepsilon}_{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}$ definite prin

$$a\bar{\varepsilon}_{\mathfrak{a}}\mathfrak{A} \quad \text{înseamnă} \quad a \notin \mathbf{a}_{\mathfrak{a}}.$$

Propoziţiile $a\varepsilon_{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}$ şi $a\bar{\varepsilon}_{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}$ care sînt propoziţii în logica L_{λ}-valentă, nu au decît două valori logice, 0 şi 1, pentru că propoziţiile $a \in \mathbf{a}_{\mathfrak{a}}$ şi $a \notin \mathbf{a}_{\mathfrak{a}}$ sînt în logica bivalentă, $\mathbf{a}_{\mathfrak{a}}$ fiind mulţimi ordinare.

Mulţimea perechilor $<\alpha, +>$, $<\alpha, ->$, unde α este un număr real $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ excluzînd pe $<1, +>$ şi $<0, ->$ va fi numită $K(L_{\lambda})$ sau krasnerianul lui L_{λ}. Remarcăm că $K(L_n) = L_n$ pentru că $\left(\frac{i}{n-1}\right)_+ = \left(\frac{i+1}{n-1}\right)_-$

§5. Observaţii

În acest capitol am întrebuinţat simultan trei feluri de limbi

I. *Limba nuanţată.* În această limbă se folosesc indivizii $a, \ldots, z$ şi mulţimea lor I, mulţimile nuanţate $\mathfrak{A}, \ldots$, predicatele $A, \ldots$, propoziţiile cu mai multe valori $A(a)$, apartenenţa nuanţată ε, apartenenţele modale ε_1, ε_2, $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, ε_i, $\bar{\varepsilon}_i$, $\varepsilon_{\mathfrak{a}}$, $\bar{\varepsilon}_{\mathfrak{a}}$.

II. *Limba ordinară,* în care intră indivizii $a, \ldots, z$ şi mulţimea lor I; mulţimile ordinare $\{z | A(z)\}$ în care A este un predicat bivalent, mulţimile ordinare $\mathbf{a}$, $\bar{\mathbf{a}}$, $\mathbf{a}_{\mathfrak{a}}$, $\bar{\mathbf{a}}_{\mathfrak{a}}$, perechile de mulţimi $<\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1>$, relaţia $\in$, de apartenenţă, mulţimile indexate de mulţimi ordinare $<\mathbf{a}_{n-1}, \ldots, \mathbf{a}_1>$, $\{\mathbf{a}_{\mathfrak{a}}\}$.

III. *Metalimba,* în care intră valorile logice $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n-1} \ldots \frac{n-1}{n-1}$, mulţimile $L_2, L_3, \ldots, L_n, L_{\rho}, L_{\lambda}$, propoziţiile $V_{II}(A(a)) = 0$ sau $V_{II}(A(a)) = 1$, $V_{II}(A(a)) \in L_2$, funcţia V_{II}, funcţia caracteristică f_A, $V_{III}, \ldots V_{\rho}$, V_{λ}, propoziţiile $V_n(A(a)) \in L_n$, $V_{\lambda}(A(a)) = \alpha$ etc.

Capitolul II

INTERPRETAREA MODALĂ

§1. Interpretarea logicii tetravalente

Cele patru valori $\left\{0, \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}, \ 1\right\}$ vor fi interpretate astfel:

1 înseamnă adevărul necesar;

$\frac{2}{3}$ înseamnă adevărul nu neapărat adevărat;

$\frac{1}{3}$ înseamnă falsul nu neapărat fals;

0 înseamnă falsul necesar (absurdul sau imposibilul), deci

$V_{IV}(A(a)) = 1$ înseamnă: individul a trebuie să aibă proprietatea A;

$V_{IV}(A(a)) \geqslant \frac{2}{3}$ înseamnă: individul a are proprietatea A, fie într-un mod necesar, fie întîmplător;

$V_{IV}(A(a)) \geqslant \frac{1}{3}$ înseamnă: individul a ar fi putut avea proprietatea A, iar dacă nu o are, aceasta nu este din cauză că el nu ar putea-o avea.

O mulţime nuanţată $\mathfrak{A}$ este extensia unui *concept nuanţat*. Apartenenţele nuanţate pot fi interpretate în felul următor:

$a\varepsilon_3\mathfrak{A}$, a este în mod necesar $\mathfrak{A}$;
$a\varepsilon_2\mathfrak{A}$, a este un $\mathfrak{A}$, fie în mod necesar, fie întîmplător;

$a \varepsilon_1 \mathfrak{A}$, a ar fi putut să fie un $\mathfrak{A}$, chiar dacă nu este astfel, căci, dacă nu este, aceasta nu este din cauză că n-ar fi putut să fie.

Vedem că în această interpretare se face distincția între perechile

este

trebuie să fie

. poate să fie

ultima sub forma

ar fi putut să fie.

Deci avem

$V_{IV}(A(a)) = \frac{2}{3}$ înseamnă: individul a are proprietatea A, dar într-un mod întîmplător;

$V_{IV}(A(a)) = \frac{1}{3}$ înseamnă: individul a nu are proprietatea $\mathfrak{A}$, dar ar putea să o aibă.

În același fel vedem că

$V_{IV}(A(a)) = 0$ înseamnă: individul a nu ar putea avea proprietatea A;

$V(A(a)) \leqslant \frac{1}{3}$ înseamnă: individul a nu are proprietatea A;

$V(A(a)) \geqslant \frac{2}{3}$ înseamnă: individul a nu este obligat să aibă proprietatea A;

și

$\frac{1}{3} \leqslant V(A(a)) \leqslant \frac{2}{3}$ înseamnă: individul a poate să aibă sau poate să nu aibă proprietatea A.

§2. Interpretarea logicii trivalente

Cele trei valori $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ vor fi interpretate astfel:

1 înseamnă adevăratul

$\frac{1}{2}$ înseamnă îndoielnicul

0 înseamnă falsul

deci

$V_{III}(A(a)) = 1$ înseamnă: individul a are proprietatea A;

$V_{III}(A(a)) \geqslant \frac{1}{2}$ înseamnă: individul a poate avea proprietatea A;

$V_{III}(A(a)) \leqslant \frac{1}{2}$ înseamnă: individul a poate să nu aibă proprietatea A;

$V_{III}(A(a)) = 0$ înseamnă: individul a nu are proprietatea A.

O mulțime nuanțată este extensia unui concept nuanțat:

$a \varepsilon_1 \mathfrak{A}$ înseamnă: a poate fi un $\mathfrak{A}$;
$a \varepsilon_2 \mathfrak{A}$ înseamnă: a este un $\mathfrak{A}$;
$a \bar{\varepsilon}_2 \mathfrak{A}$ înseamnă: a nu este neapărat un $\mathfrak{A}$, dar poate să fie astfel;
$a \bar{\varepsilon}_1 \mathfrak{A}$ înseamnă: a nu poate să fie un $\mathfrak{A}$.

§3. Interpretarea logicii pentavalente

Am interpretat posibilul pur în logica trivalentă prin

$$V(A(a)) = \frac{1}{2}$$

şi în logica tetravalentă prin

$$\frac{1}{3} \leqslant V(A(a)) \leqslant \frac{2}{3}.$$

Putem proceda într-un mod diferit, introducînd o logică cu cinci valori:

0 falsul necesar;

$\frac{1}{4}$ falsul nu neapărat fals;

$\frac{1}{2}$ îndoielnicul;

$\frac{3}{4}$ adevărul nu necesar,

1 adevărul necesar.

Valoarea logică pentavalentă a unei propoziţii $V_{V}(A(a))$ va fi una dintre aceste cinci valori.

§4. Interpretarea probabilistică a logicii L_λ-valente

Numerele reale cuprinse între 0 şi 1 pot fi concepute ca probabilităţi.

În acest caz, propoziţia $A(a)$ este înţeleasă ca avînd o anumită probabilitate de a fi adevărată. Această idee a fost susţinută de mai mulţi autori începînd cu É. Borel. Interpretarea valorilor logice ale logicii cu mai multe valori a fost susţinută de Z. Zawirski (ideea se întîlneşte la Boole).

L. Zadeh este de părere că trebuie făcută distincţia între *random-ness*, sau concepţia probabilistică a valorii logice, şi *fuzzy-ness*, sau concepţia logicii pe care o numim *nuanţată*.

Aderăm la părerea lui Zadeh. Din acest punct de vedere valorile $V_\lambda(A(a))$ *nu sînt numere reale*; de exemplu suma $\alpha + \beta$ a două valori logice, înmulţirea $\alpha \cdot \beta$ a două valori logice *nu au sens*.

Dimpotrivă, *ideea de ordine are un sens logic*. Faptul că pentru două propoziții p și q.

$$V_{\lambda}(p) < V_{\lambda}(q)$$

are semnificația următoare:

p este mai puțin adevărat decît q

sau

q este mai adevărat decît p.

Această relație are proprietatea

sau amîndouă propozițiile p și q sînt adevărate în aceeași măsură

$$V_{\lambda}(p) = V_{\lambda}(q)$$

sau una dintre cele două este mai adevărată decît cealaltă

$$V_{\lambda}(p) < V_{\lambda}(q)$$

sau

$$V_{\lambda}(p) > V_{\lambda}(q).$$

Acest principiu va fi numit principiul ordonării totale (sau liniare) a valorilor logice. Se pot construi:

I. Logici definite prin valorile logice care formează o mulțime ordonată cu ordine non-liniară, adică acelea care nu satisfac acest principiu.

II. Logici definite prin valori logice care formează o mulțime liniară ordonată care să nu fie asemănătoare mulțimii L_{λ}. Un astfel de caz este acela în care mulțimea valorilor logice este mulțimea L_{ρ} a numerelor raționale cuprinse între 0 și 1

§5. Observații

Ideile modale: posibil, imposibil, necesar, non-necesar, au fost studiate de numeroși logicieni. Aristotel a creat o teorie a silogismului modal. Cu toate acestea, regulile modalității, așa cum se prezintă ele în această silogistică

modală a lui Aristotel, nu coincid cu acelea ale logicii trivalente sau polivalente.

Introducerea logicilor cu mai multe valori în vederea construirii unei logici a modalităţilor este datorată lui J. Lukasiewicz.

Logica intuiţionistă a lui A. Heyting poate fi, de asemenea, interpretată ca logică modală care admite o idee de imposibilitate şi o idee de posibilitate definită ca dublă imposibilitate, aserţiunea fiind aserţiune apodictică.

C. I. Lewis a construit o logică modală pornind de la idei diferite de cele ale lui J. Lukasiewicz. E. Post a construit logicile cu mai multe valori fără să le dea însă nici o interpretare.

G. von Wright a construit o logică modală în vederea utilizării ei ca o logică deontică.

Problema caracterizării logicii modale a lui Aristotel rămîne deschisă.

În afara faptului că nu coincide cu modalitatea aristoteliană, interpretarea modală a logicilor cu mai multe valori ridică dificultăţi care au fost puse în evidenţă.

Cu toate acestea, limbajul modal este foarte comod pentru expunerea logicii cu mai multe valori.

Scopul acestor lecţii este de a arăta că logicile cu mai multe valori permit construirea unei logici a raţionamentului nuanţat, acest termen avînd semnificaţia precisă care va reieşi din textul care urmează.

Noi am întîlnit exemple importante pentru tehnica propoziţiilor cu mai multe valori în teoria algebrică a circuitelor de comutare.

Capitolul III

RELAŢIA DE IDENTITATE: IDENTITATE ŞI INDISCERNABILITATE

O judecată de identitate

a şi b sînt identici (1)

pe care o scriem

$$a = b \quad (2)$$

face să intervină doi indivizi a şi b şi o relaţie binară „=".

Identitatea a doi indivizi a şi b este echivalentă cu judecata

indivizii a şi b
sînt indiscernabili, (3)

ceea ce vrea să spună că

indivizii a şi b
au aceleaşi proprietăţi. (4)

Am notat prin

$$A(a) \quad (5)$$

propoziţia

individul a are
proprietatea A. (6)

Echivalenţa dintre (1) şi (4) se descompune în două propoziţii. Prima este

dacă $a = b$ şi dacă individul
a are proprietatea A, atunci şi (7)
b va avea proprietatea A,

iar cea de a doua propoziţie este

$$\text{dacă, oricare ar fi proprietatea } A\text{, faptul că } a \text{ are propr etatea } A \text{ echivalează cu faptul că } b \text{ are această proprietate, atunci } a = b. \qquad (8)$$

Vom analiza propoziţiile (7) şi (8).
Propoziţia (7) va fi scrisă

$$\text{dacă } a = b \text{ şi dacă } A(a)\text{, atunci } A(b)\text{;} \qquad (9)$$

acest principiu va fi numit *indiscernabilitatea identităţilor*. Acest principiu ne permite să deducem un *criteriu de diversitate*:

dacă unul dintre indivizii a, b are o proprietate pe care celălalt nu o are, atunci a şi b sînt diferiţi. (10)

Propoziţia (8) va fi numită principiul de identitate a indiscernabilităţilor. Prima consecinţă este *reflexivitatea* identităţii:

$$a = a. \qquad (11)$$

Într-adevăr, pentru orice predicat A, dacă $A(a)$, atunci $A(a)$, deci $a = a$.

În principiul (7), să luăm ca proprietate A proprietatea de a fi egal cu c: $A(x)$ va fi $x = c$; principiul (7) ne dă

$$\text{dacă } a = b \text{ atunci dacă } a = c \text{ avem } b = c. \qquad (12)$$

În particular, acest principiu (12) este valabil dacă în loc de c se scrie a

$$\text{dacă } a = b \text{ atunci dacă } a = a \text{ atunc } b = a.$$

Or $a = a$ este adevărat în virtutea lui (11), deci această propoziție se reduce la

$$\text{dacă } a = b \text{ atunci } b = a \qquad (13)$$

care este legea *simetriei* identității.

În virtutea simetriei, ipoteza lui (12), care este: „dacă $a = b$" poate fi scrisă: „dacă $b = a$" și (12) devine

$$\text{dacă } b = a \text{ atunci dacă } a = c \text{ avem } b = c. \qquad (14)$$

Schimbînd literele în (14) obținem legea *tranzitivității* identității

$$\text{dacă } a = b \text{ atunci dacă } b = c \text{ avem } a = c. \qquad (15)$$

Cu simetria (13), propoziția (15) dă

$$\text{dacă } a = c \text{ și } b = c \text{ atunci } a = b. \qquad (16)$$

Proprietățile (12) și (14) se enunță

dacă doi indivizi sînt identici
cu un al treilea, atunci el însuși sînt (17)
identici.

Identitatea indiscernalibităților ridică două probleme:

I. Ce se întîmplă dacă doi indivizi a și b au *cea mai mare parte* a proprietăților în comun?

II. Ce se întîmplă dacă doi indivizi a și b au *cele mai importante* proprietăți în comun?

Capitolul IV

RELAȚIILE DE ECHIVALENȚĂ

§ 1 Definiții.

Vom spune că o relație binară „$\equiv$" este o relație de echivalență dacă ea este *reflexivă*,

$$a \equiv a,$$

simetrică

$$\text{dacă} \quad a \equiv b \quad \text{atunci} \quad b \equiv a$$

și *tranzitivă*

$$\text{dacă } a \equiv b \text{ și } b \equiv c \quad \text{atunci} \quad a \equiv c.$$

Este ușor de văzut că pentru orice relație de echivalență avem

a. Dacă $a \equiv c$ și $b \equiv c$ atunci $a \equiv b$.

b. Dacă $c \equiv a$ și $c \equiv b$ atunci $a \equiv b$.

Exerciții. 1. Dacă o relație binară „$\equiv$" este reflexivă și satisface condiția a. de mai sus, ea este simetrică și tranzitivă.

2. Dacă o relație binară „$\equiv$" este reflexivă și satisface condiția b. de mai sus, atunci ea este simetrică și tranzitivă.

§ 2. Clase de echivalență: exemple

Considerăm mulțimea cu cincisprezece indivizi

$$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

și o relație „$\equiv$" definită după cum urmează:

a) „≡" este reflexivă; aceasta vrea să spună că propozițiile $1 \equiv 1$, $2 \equiv 2$, $3 \equiv 3$, $4 \equiv 4$, $5 \equiv 5$, $6 \equiv 6$, $7 \equiv 7$, $8 \equiv 8$, $9 \equiv 9$, $10 \equiv 10$, $11 \equiv 11$, $12 \equiv 12$, $13 \equiv 13$, $14 \equiv 14$, $15 \equiv 15$ sînt adevărate.

b) propozițiile

$1 \equiv 10$, $1 \equiv 12$, $2 \equiv 3$, $2 \equiv 7$, $2 \equiv 15$, $3 \equiv 7$, $3 \equiv 15$, $4 \equiv 11$, $5 \equiv 6$, $5 \equiv 8$. $5 \equiv 13$, $5 \equiv 14$, $6 \equiv 8$, $6 \equiv 13$, $6 \equiv 14$, $7 \equiv 15$, $8 \equiv 13$, $8 \equiv 14$, $10 \equiv 12$, $13 \equiv 14$,

sînt adevărate;

c) „≡" este simetrică; aceasta arată că propozițiile $10 \equiv 1$, $12 \equiv 1$, $3 \equiv 2$, $7 \equiv 2$, $15 \equiv 2$, $7 \equiv 3$, $15 \equiv 3$, $11 \equiv 4$, $6 \equiv 5$, $8 \equiv 5$, $13 \equiv 5$, $14 \equiv 5$, $8 \equiv 6$, $13 \equiv 6$, $14 \equiv 6$, $15 \equiv 7$, $13 \equiv 8$, $14 \equiv 8$, $12 \equiv 10$, $14 \equiv 13$, sînt, de asemenea, adevărate.

Vrem să demonstrăm că această relație este o relație de echivalență. Pentru aceasta, vom proceda în felul următor.

Considerăm elementul 1 și elementele $x \equiv 1$; acestea sînt 10 și 12; să formăm mulțimea $\{1, 10, 12\}$; vedem că oricare două elemente din această mulțime sînt echivalente între ele în virtutea lui a, b, c și că orice element $x \equiv 1$, după cum orice element $x \equiv 10$ și orice element $x \equiv 12$ este în mulțimea $\{1, 10, 12\}$.

Luăm un element care nu aparține acestei mulțimi $\{1, 10, 12\}$, fie acesta 2, și căutăm toate elementele $x \equiv 2$. Acestea sînt 3, 7, 15. Formăm mulțimea $\{2, 3, 7, 15\}$. Vedem că oricare două elemente ale acestei mulțimi sînt în relația „≡" și orice element care este în relația „≡" cu unul dintre elementele mulțimii $\{2, 3, 7, 15\}$ aparține acestei mulțimi.

Repetînd acest procedeu, obținem mulțimile noi

$$\{4, 11\}, \{5, 6, 8, 13, 14\}, \{9\}.$$

Cele cinci mulțimi

$$\{1, 10, 12\}, \{2, 3, 7, 15\}, \{4, 11\}, \{5, 6, 8, 13, 14\}, \{9\}$$

prezintă următoarele proprietăți

a. Aceste mulțimi epuizează mulțimea *I* (spunem că reuniunea lor este *I*);

b. Aceste mulțimi sînt două cîte două disjuncte (adică: ele nu au nici un element comun);

c. Două elemente a, b ale aceleiaşi mulţimi (identice sau disjuncte) sînt în relaţia $a \equiv b$;

d. Orice element x, astfel încît $x \equiv a$, se găseşte în aceeaşi mulţime cu a.

§ 3. Teorema fundamentală

Fiind dată o relaţie „$\equiv$" astfel încît să se poată forma o mulţime de mulţimi

$$\{A_1, \quad A_r\}$$

avînd proprietăţile a — d de mai sus, relaţia „$\equiv$" este o relaţie de echivalenţă.

Într-adevăr, dacă $a \in I$, atunci, deoarece $A_1, \ldots, A_r$ epuizează pe I, există un i astfel încît $a \in A_i$; dar a şi a aparţin amîndouă lui A_i, deci, în virtutea lui c, avem $a \equiv a$, deci „$\equiv$" este reflexivă.

Fie $a \equiv b$ şi fie A_i o mulţime astfel încît $b \in A_i$; în virtutea lui a, deoarece $a \equiv b$ şi $b \in A_i$, avem $a \in A_i$; în virtutea lui c, deoarece $b \in A_i$, $a \in A_i$, avem $b \equiv a$, deci „$\equiv$" este simetrică.

Fie $a \equiv b$ şi $b \equiv c$, deci „$\equiv$" fiind simetrică, $c \equiv b$. Dacă $b \in A_i$, în virtutea lui a, deoarece $a \equiv b$, $c \equiv b$, $b \in A_i$, avem $a \in A_i$, $c \in A_i$, deci, ţinînd seamă de c, rezultă $a \equiv c$, deci „$\equiv$" este tranzitivă.

§ 4. Clasele de echivalenţă

Fie „$\equiv$" o relaţie de echivalenţă. Numim

$$\hat{a} = \{x / x \equiv a\}$$

$\hat{a}$ va fi numită clasa de echivalenţă care conţine pe a.

Proprietatea I. $a \in \hat{a}$.
Intr-adevăr, $a \equiv a$

Proprietatea II. Clasele de echivalenţă epuizează I.
Într-adevăr, pentru orice $a \in I$, există o clasă de echivalenţă $\hat{a}$ care conţine pe a.

Proprietatea III. Două clase de echivalență sînt disjuncte sau identice.

Într-adevăr, dacă două clase de echivalență $\hat{a}$ și $\hat{b}$ nu sînt disjuncte, ele au un element comun c:

$$c \in \hat{a} \qquad c \in \hat{b}.$$

Or $c \in \hat{a}$ înseamnă $c \equiv a$; același $c \in \hat{b}$ înseamnă $c \equiv b$, deci $a \equiv c \equiv b$, deci $a \equiv b$, deci $a \in \hat{b}$ și $b \in \hat{a}$.

Pentru orice $x \in \hat{a}$ avem $x \equiv a$, deci $x \equiv b$, deci $x \in \hat{b}$, deci $\hat{a} \subset \hat{b}$. La fel $\hat{b} \subset \hat{a}$, deci $\hat{a} = \hat{b}$.

Proprietatea IV Două elemente din aceeași clasă sînt echivalente dacă $x \in \hat{a}$, $y \in \hat{a}$, atunci $x \equiv a$, $y \equiv a$, deci $x \equiv y$.

Proprietatea V Orice element echivalent cu un element dintr-o clasă aparține acestei clase dacă $x \in \hat{a}$ și $y \equiv x$, atunci $x \equiv a$, deci $y \equiv a$, deci $y \in \hat{a}$.

Proprietatea VI. Dacă $\hat{a} = \hat{b}$, atunci $a \equiv b$. Într-adevăr, $a \in \hat{a}$, deci, pentru că $\hat{a} = \hat{b}$, $a \in \hat{b}$, deci $a \equiv b$.

Proprietatea VII. Dacă $a \equiv b$, atunci $\hat{a} = \hat{b}$, căci, dacă $a \equiv b$, atunci $a \in \hat{b}$, or $a \in \hat{a}$, deci $\hat{a}$ și $\hat{b}$ nu sînt disjuncte, deci $\hat{a} = \hat{b}$.

Mulțimea claselor de echivalență ale lui I în raport cu „$\equiv$" va fi numită

$$I/\equiv.$$

Pînă acum nu am presupus că mulțimile I sau $I/\equiv$ sînt finite.

§ 5. Metoda grafurilor

Fie „$\equiv$" o relație de echivalență între elementele lui I. Vom uni printr-un segment ab punctele a și b dacă $a \equiv b$. Se obține astfel un graf (fig. 6).

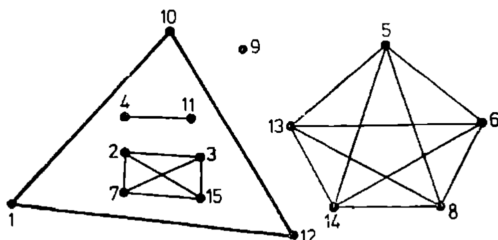


Fig. 6

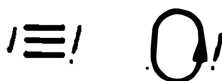


Fig.

Pentru a nu încărca figura, putem să nu desenăm buclele date de reflexivitate (fig. 7).

Graful considerat poate fi descompus în grafuri complete (fig. 8).

Un graf complet este o mulţime de noduri şi de segmente astfel încît fiecare pereche de noduri să fie unită printr-un segment.

Aceste grafuri complete corespund claselor de echivalenţă din § 2.

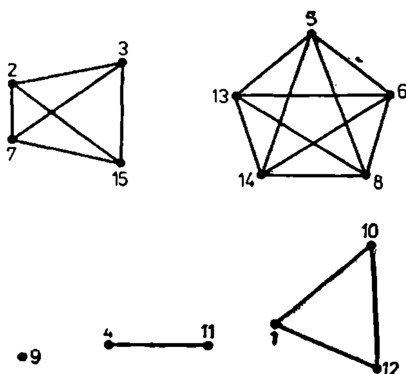


Fig. 8

§ 6. Metoda matricilor

Fiind dată o relaţie binară între elementele unei mulţimi finite I vom forma un tablou pătrat M în felul următor :

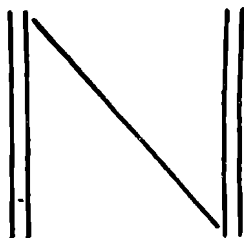
Numele elementelor vor fi înscrise deasupra coloanelor şi la începutul liniilor, în aceeaşi ordine.

Elementul din linia i şi din coloana j va fi 1 dacă $i \equiv j$ este adevărată şi 0 dacă $i \equiv j$ este falsă.

De exemplu, pentru relaţia scrisă în §2, tabloul este următorul, şi va fi notat cu M

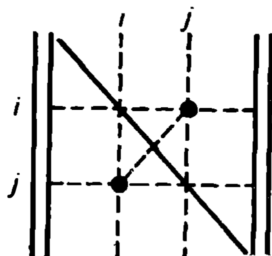
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0
6	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0
7	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
8	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
11	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
12	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
13	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0
14	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0
15	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Pe acest tablou reflexivitatea este vizibilă: perechile $i \equiv i$ dau elementele diagonalei



principale, care sînt 1.

Pe acelaşi tablou putem controla simetria, perechile $i \equiv j$ şi $j \equiv i$ sau elementele simetrice în raport cu această diagonală principală



care trebuie să fie în acelaşi timp 0 sau 1.

Vom încerca să reducem matricea M la o formă canonică.

Să considerăm prima linie:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0

şi să permutăm coloanele în aşa fel încît să avem 1 unul după altul

1	10	12	2	3	4	5	6	7	8	9	11	13	14	15
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Să facem aceeaşi permutare coloanelor. Matricea M devine

	1	10	12	2	3	4	5	6	7	8	9	11	13	14	15
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0												
3	0	0	0												
4	0	0	0												
5	0	0	0												
6	0	0	0												
7	0	0	0						M_1						
8	0	0	0												
9	0	0	0												
11	0	0	0												
13	0	0	0												
14	0	0	0												
15	0	0	0												

Matricea nescrisă are liniile şi coloanele

$$I_1 = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 11,\ 13,\ 14,\ 15\}$$

ea este M_1

	2	3	4	5	6	7	8	9	11	13	14	15
2	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
3	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
4	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
6	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
7	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
8	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
11	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
13	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
14	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
15	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1

Prima linie a acestei matrici are 1 în coloanele care poartă titlurile 2, 3, 7, 15. Făcînd o permutare a liniilor şi coloanelor matricii M_1, astfel încît să fie scrise în ordinea

2, 3, 7, 15, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 14

ea devine

	2	3	7	15	4	5	6	8	9	11	13	14
2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
15	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0								
5	0	0	0	0								
6	0	0	0	0								
8	0	0	0	0			M_2					
9	0	0	0	0								
11	0	0	0	0								
13	0	0	0	0								
14	0	0	0	0								

Matricea M_2 este următoarea

	4	5	6	8	9	11	13	14
4	1	0	0	0	0	1	0	0
5	0	1	1	1	0	0	1	1
6	0	1	1	1	0	0	1	1
8	0	1	1	1	0	0	1	1
9	0	0	0	0	1	0	0	0
11	1	0	0	0	0	1	0	0
13	0	1	1	1	0	0	1	1
14	0	1	1	1	0	0	1	1.

Aranjînd liniile și coloanele matricei M_2 în ordinea

4, 11, 5, 6, 8, 9, 13, 14

ea capătă forma

	4	11	5	6	8	9	13	14
4	1	1	0	0	0	0	0	0
11	1	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0						
6	0	0						
8	0	0			M_3			
9	0	0						
13	0	0						
14	0	0						

unde M_3 este

	5	6	8	9	13	14
5	1	1	1	0	1	1
6	1	1	1	0	1	1
8	1	1	1	0	1	1
9	0	0	0	1	0	0
13	1	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1	1

Aranjînd liniile și coloanele lui M_3 în ordinea

5, 6, 8, 13, 14, 9

matricea M_3 ia forma

	5	6	8	13	14	9
5	1	1	1	1	1	0
6	1	1	1	1	1	0
8	1	1	1	1	1	0
13	1	1	1	1	1	0
14	1	1	1	1	1	0
9	0	0	0	0	0	1

Deci matricea dată va avea forma

	1 10 12	2 3 7 15	4 11	5 6 8 13 14	9
1 10 12	1	0	0	0	0
2 3 7 15	0	1	0	0	0
4 11	0	0	1	0	0
5 6 8 13 14	0	0	0	1	0
9	0	0	0	0	1

Matricile pătrate notate cu 1 au toate elementele egale cu 1; matricile dreptunghiulare notate cu 0 au toate elementele lor egale cu 0.

Capitolul V

PROCESUL DE ABSTRACTIZARE

§1. Partiţii şi relaţii de echivalenţă

Fie o mulţime I, pe care o vom presupune finită. O mulţime de submulţimi ale lui I va fi numită o partiţie a lui I

$$P = \{A_1, \qquad A_n\}$$

dacă cele două condiţii de mai jos sînt satisfăcute:

α) Două mulţimi A_i, A_j diferite $(i \neq j)$ sînt disjuncte

$$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad (i \neq j),$$

β) Reuniunea mulţimilor $A_1, \quad ., A_n$ este I

$$A_1 \cup \quad .' \cup A_n = I,$$

adică pentru orice $a \in I$ există un i astfel încît $a \in A_i$. Mulţimea A_i astfel încît $a \in A_i$ este unică, pentru că două mulţimi A_i şi A_j sînt disjuncte.

Fiind dată o partiţie P, putem defini o relaţie „$\equiv$" pentru care

$$a \equiv b$$

înseamnă că a şi b aparţin aceleiaşi A_i, deci că există un i astfel încît $a \in A_i$, $b \in A_i$.

Lema 1. *Relaţia „$\equiv$" este o relaţie de echivalenţă.* Întradevăr, pentru oricare a există un i astfel încît $a \in A_i$, deci $a \in A_i$ şi $a \in A_i$, deci $a \equiv a$, deci relaţia „$\equiv$" este reflexivă. Dacă există un i astfel încît $a \in A_i$ şi $b \in A_i$, atunci pentru acest i: $b \in A_i$ şi $a \in A_i$, deci dacă $a \equiv b$, atunci $b \equiv a$ şi relaţia este simetrică. Dacă $a \equiv b$ şi $b \equiv c$, atunci există un i şi un j astfel încît $a \in A_i$, $b \in A_i$ şi $b \in A_j$, $c \in A_j$, deci $b \in A_i \cap A_j$, deci $A_i \cap A_j \neq \emptyset$,

deci $A_i = A_j$, deci $a \in A_i$, $c \in A_i$, deci $a \equiv c$ și relația este tranzitivă.

Vom spune că „≡" este relația de echivalență asociată partiției P și o vom scrie $E(P)$.

În capitolul precedent am arătat că, fiind dată o relație de echivalență E, mulțimea I/E a claselor de echivalență formează o partiție. O vom numi $P(E)$

$$P(E) = I/E.$$

Lema 2. $E(P(E)) = E$.

Într-adevăr, dacă E este o relație de echivalență, fie $A_1, \ldots, A_n$ clasele de echivalență, elemente ale lui $P(E) = I/E$. Relația de echivalență „≡" sau $E(P(E))$ asociată partiției $P(E)$ este definită prin

$$a \equiv b \text{ înseamnă că}$$

$$a \in A_i,\ b \in A_i.$$

Or, pentru că A_i este o clasă de echivalență, $a \in A_i$, $b \in A_i$ înseamnă aEb, deci $a \equiv b$ înseamnă aEb.

Lema 3. $P(E(P)) = P$.

Într-adevăr, dacă $P = \{A_1, \quad A_n\}$ relația

$$a(E(P))b \text{ înseamnă}$$

$$a \in A_i, \quad b \in A_i,$$

deci clasele de echivalență ale lui $E(P)$ sînt $A_1, \ldots, A_n$, deci $I/E(P) = \{A_1, \quad A_n\}$ și $P(E(P)) = P$.

§ 2. Definițiile prin abstracție

Formarea mulțimii $I/_{\equiv}$, sau mulțimea cît a mulțimii I, prin relația de echivalență „≡" joacă un rol foarte important în matematică. În acest paragraf I și $I/_{\equiv}$ pot fi infinite. Iată cîteva idei definite prin formarea mulțimii cît.

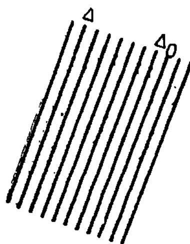


Fig. 9

Ideea de direcție. Fie I mulțimea dreptelor din plan și fie „$\|$" relația de paralelism. (În cele ce urmează, cuvîntul „paralelism" este întrebuințat în sens matematic, adică acceptînd terminologia

dreapta Δ este paralelă cu ea însăși).

Pentru că, atunci cînd spunem: două drepte Δ', Δ'' sînt paralele, rolul jucat de Δ' și Δ'' este simetric, putem spune

dacă Δ' este paralelă cu Δ''

atunci Δ'' este paralelă cu Δ'

Faptul că două drepte paralele cu o a treia sînt paralele între ele enunță tranzitivitatea relației de paralelism.

Mulțimea D a tuturor dreptelor Δ paralele cu o dreaptă Δ_0 este o clasă de echivalență pentru relația „este paralelă cu" între drepte. Două drepte ale lui D sînt paralele între ele. Putem spune, într-o manieră naivă, că ceea ce au comun dreptele din D este direcția lor. Putem proceda și într-o manieră riguroasă și vom defini noțiunea de direcție astfel: vom numi direcție clasele de echivalență ale relației de paralelism a dreptelor.

Ideea de formă. Fie două figuri F' și F'' vom spune că F' este asemenea lui F'' dacă fiecărui triunghi $A'B'C'$ al lui F' îi corespunde un triunghi $A''B''C''$ al lui F'', astfel încît $A'B'C'$ și $A''B''C''$ să fie asemenea.

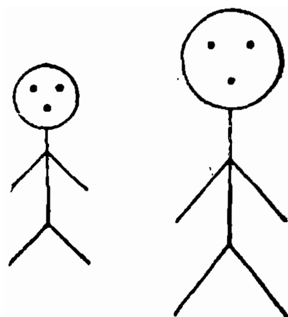


Fig. 10

În figurile astfel asociate, oricare triunghiuri $A'B'C'$, ..., $H'K'L'$ sînt asemenea omoloagelor lor $A''B''C''$, .., $H''K''L''$.

Relaţia de asemănare între două figuri este o relaţie de echivalenţă, fapt uşor de observat.

Clasele de echivalenţă sînt *formele* figurilor. A spune că două figuri au aceeaşi formă revine la a spune că cele două figuri sînt asemănătoare.

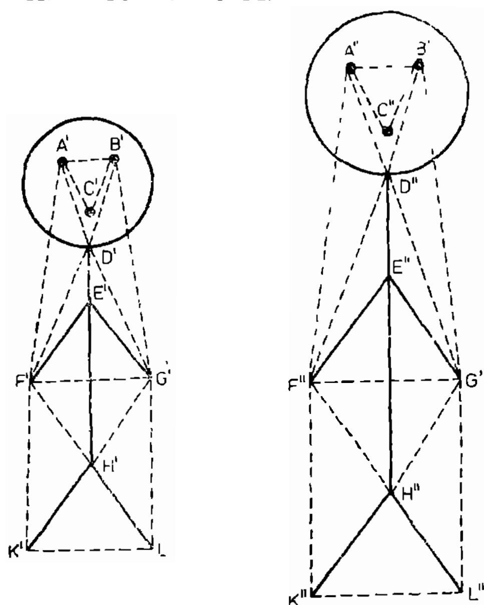


Fig. 11

Ideea de egalitate. Se spune, în geometrie, că două figuri f, f' sînt egale atunci cînd putem obţine f' deplasînd pe f. Vom scrie $f \equiv f'$.

Această deplasare poate fi nulă, deci $f \equiv f$; dacă obţinem pe f' din f printr-o deplasare, putem readuce f' la poziţia f, deci dacă $f \equiv f'$ atunci $f' \equiv f$. Dacă $f \equiv f'$ şi $f' \equiv f''$, atunci obţinem f' deplasînd f şi f'' deplasînd f', deci obţinem f'' deplasînd f, deci $f \equiv f''$.

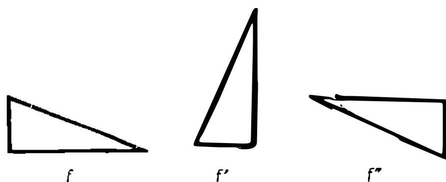


Fig. 12

deci egalitatea prin deplasare este o relaţie de echivalenţă.

§3. Procesele de abstractizare

Presupunem că se consideră un număr de predicate

$$P_1, \qquad P_p.$$

Pentru fiecare individ a se poate construi tabloul proprietăţilor sale

P_1	P_2	P_n
$V_{II}(P_1(a))$	$V_{II}(P_2(a))$	$V_{II}(P_n(a))$

deci scriind un 1 dedesubtul lui P_i dacă a are proprietatea P_i şi un 0 dacă a nu o are.

Pentru doi indivizi a şi b se poate întîmpla ca ei să aibă sau ca ei să nu aibă, în acelaşi timp, proprietăţile

$$P_1, \qquad P_r$$

dar ca proprietăţile $P_{r+1}, \ldots, P_p$ să nu fie interesante. Făcînd abstracţie de proprietăţile $P_{r+1}, \ldots\ldots, P_p$, indivizii a şi b sînt identici. Acesta este procesul pe care îl vom studia.

Fie

$$a_1, \qquad a_n$$

indivizii. Să construim tabloul

	P_1	P_p
a_1	c_{11}	c_{1p}
a_n	c_{n1}	c_{np}

în care $c_{ij} = 1$ dacă individul a_i are proprietatea P_j şi $c_{ij} = 0$ dacă a_i nu are proprietatea P_j, deci $c_{ij} = V_{II}(P_j(a_i))$.

Să introducem relaţia

$$a_h \equiv a_k$$

dacă

$$c_{h1} = c_{k1}$$

$$c_{hr} = c_{kr},$$

deci dacă $c_{hi} = c_{ki} = 1$ indivizii a_h şi a_k au amîndoi proprietatea P_i şi dacă $c_{hi} = c_{ki} = 0$ indivizii a_h, a_k nu au proprietatea P_i. Valorile $c_{hr+1}, \ldots, c_{hp}, \; c_{kr+1}, \ldots \; c_{kp}$ sînt indiferente.

Relaţia „$\equiv$" definită în acest fel este o relaţie de echivalenţă.

Într-adevăr, oricare ar fi i, avem $a_{hi} = a_{hi}$, deci $a_h \equiv a_h$.

Dacă $a_h \equiv a_k$, egalităţile de mai sus sînt adevărate, deci

$$c_{k_1} = c_{h_1}$$

$$c_{kr} = c_{hr},$$

deci $a_k \equiv a_h$ și relația „$\equiv$" este simetrică. Dacă $a_h \equiv a_k$ și $a_k \equiv a_l$ avem de asemenea

$$c_{k_1} = c_{l_1}$$

$$c_{kr} = c_{lr},$$

deci

$$c_{h_1} = c_{l_1}$$

$$c_{hr} = c_{lr},$$

deci $a_h \equiv a_l$, deci relația „$\equiv$" este tranzitivă.

§ 4. Exemple

Egalitatea figurilor în sens geometric este un bun exemplu de relație de echivalență obținut prin procesul de abstractizare.

În geometria elementară se spune că două figuri, de exemplu două triunghiuri, sînt egale dacă unul provine din celălalt printr-o deplasare. Să admitem în această definiție cazul deplasării identice care transformă orice triunghi în el însuși, deci scriind $T' \equiv T''$ dacă T'' provine din T' printr-o deplasare, obținem în acest fel reflexivitatea

$$T \equiv T$$

Dacă T'' provine din T', printr-o deplasare D dînd lui T'' deplasarea inversă, vom regăsi pe T', ceea ce ne dă simetria

$$\text{dacă } T' \equiv T'' \text{ atunci } T'' \equiv T'$$

Or, dacă prin deplasarea D_1 a lui T' obținem T'' și prin deplasarea D_2 a lui T'' obținem T''', atunci, efectuînd deplasarea D, care este deplasarea D_1 urmată de

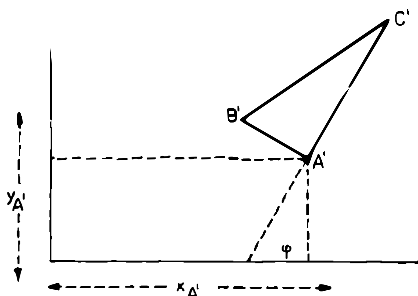


Fig. 13

D_2 plecînd de la T', obținem T'', deci obținem tranzitivitatea

dacă $T' \equiv T''$ și $T'' \equiv T'''$ atunci $T' \equiv T'''$,

deci egalitatea prin deplasare este o relație de echivalență.

O figură geometrică este caracterizată prin poziția punctelor sale; de exemplu, triunghiul $A'B'C'$ este identic cu triunghiul $A''B''C''$ dacă punctele A' și A'' coincid, dacă B' și B'' coincid și dacă C' și C'' coincid.

Dar dacă triunghiurile $A'B'C'$ și $A''B''C''$ sînt egale, aceasta înseamnă că ele au aceleași proprietăți, în afara celor privind poziția lor. Deci conceptul de triunghi ABC care are aceleași laturi și aceleași unghiuri ca și $A'B'C'$ sau ca $A''B''C''$, dar a cărui *poziție este nedeterminată* este obținută din figurile $A'B'C'$ sau $A''B''C''$ dacă facem abstracție de pozițiile lor; deci triunghiul avînd laturile 3, 4, 5 este clasa de echivalență a tuturor triunghiurilor desenate care au laturile 3, 4, 5.

Iată o precizare. Un triunghi $A'B'C'$ (fig. 13) poate fi caracterizat prin proprietățile următoare:

I. Cele trei laturi $B'C' = 5$, $A'C' = 3$, $A'B' = 2$,

II. Coordonatele $x_A, \ldots, y_A$, ale vîrfului A',

III. Unghiul φ pe care dreapta $A'C'$ îl face cu axa Ox.

Două triunghiuri sînt congruente $A'B'C' \equiv A''B''C''$ dacă au aceleași proprietăți I, proprietățile II și III putînd fi neglijate.

Să considerăm tabloul (1) construit anterior. Doi indivizi a și b.

$$\begin{array}{c||ccc} & P_1 & & P_p \\ \hline a & \alpha_1 & & \alpha_p \\ b & \beta_1 & & \beta_p \end{array} \qquad (1)$$

au amîndoi proprietatea P_h, dacă $\alpha_h = \beta_h = 1$; în acest caz $\alpha_h - \beta_h = 0$. Cei doi indivizi nu au proprietatea P_h dacă $\alpha_h = \beta_h = 0$ și în acest caz $\alpha_h - \beta_h = 0$. Deci, dacă raportat la proprietatea P_h indivizii a și b sînt în aceeași situație, atunci $\alpha_h - \beta_h = 0$. Reciproc, dacă $\alpha_h - \beta_h = 0$ atunci sau $\alpha_h = \beta_h = 0$ și cei doi indivizi nu au proprietatea, sau $\alpha_h = \beta_h = 1$ și cei doi indivizi au amîndoi proprietatea P_h.

Dacă individul a are proprietatea P_h și b nu o are, $\alpha_h = 1$, $\beta_h = 0$, $\alpha_h - \beta_h = 1$; dacă a nu are proprietatea P_h dar b are această proprietate, $\alpha_h = 0$, $\beta_h = 1$, $\alpha_h - \beta_h = -1$, $|\alpha_h - \beta_h| = 1$ și reciproc. Deci

i) dacă în raport cu proprietatea P_h situația indivizilor a și b este aceeași, $|\alpha_h - \beta_h| = 0$;

ii) dacă indivizii a și b pot fi deosebiți prin proprietatea P_h, unul avînd iar celălalt neavînd această proprietate, $|\alpha_h - \beta_h| = 1$.

Deci, în continuare,

$$|\alpha_1 - \beta_1|, \ |\alpha_2 - \beta_2|, . \quad |\alpha_p - \beta_p|, \qquad (2)$$

numărul $\delta(a,b)$ al $|\alpha_h - \beta_h| \neq 0$ este numărul proprietăților prin care a se deosebește de b. Acest număr este

$$\delta(a,b) = |\alpha_1 - \beta_1| + \quad + |\alpha_p - \beta_p|. \qquad (3)$$

Dacă $\delta(a,b) = 0$ elementele a și b nu sînt discernabile printr-una dintre proprietățile $P_1, \ldots, P_p$, căci în acest caz pentru orice h: $\alpha_h - \beta_h = 0$, deci $\alpha_h = \beta_h$.

Dacă $\delta(a,b) \neq 0$ elementele a și b sînt discernabile $P_1, \ldots, P_p$.

Putem vedea că $\delta(a,b)$ măsoară cît de diferite sînt elementele a și b. Dacă $\delta(a,b) = 1$ nu există decît o singură proprietate $P_1, \ldots, P_p$ prin care a și b sînt diferențiate,

căci dacă $\delta(a,b) = 1$ nu există decît un singur termen $|\alpha_h - \beta_h|$ care este diferit de 0 și egal cu 1.

$\delta(a,b)$ va fi numit *distanța* între a și b în raport cu proprietățile $P_1, \ldots, P_p$.

Teoremă

$$\delta(a,c) \leqslant \delta(a,b) + \delta(b,c).$$

Într-adevăr, pentru fiecare h

$$|\alpha_h - \gamma_h| = |\alpha_h - \beta_h + \beta_h - \gamma_h| \leqslant |\alpha_h - \beta_h| + |\beta_h - \gamma_h|,$$

căci, oricare ar fi numerele reale a, b, c*

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

---

* Amintim că valoarea absolută a a numărului real pozitiv sau negativ a este: $|a| = a$ dacă $a \geqslant 0$ și $|a| = -a$ dacă $a \leqslant 0$. Proprietatea $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ poate fi demonstrată. Într-adevăr, dacă a, b sînt pozitive, $a+b$ este pozitiv $|a + b| = a + b = |a| + |b|$; dacă a, b sînt negative $a + b$ este negativ $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) = |a| + |b|$. Dacă a este pozitiv și dacă b este negativ și dacă $|a| \leqslant |b|$, atunci $a + b = a - (-b) = |a| - |b|$ este pozitiv și $|a + b| \leqslant a = |a| \leqslant |a| + |b|$; dacă a este pozitiv și dacă b este negativ și dacă $|a| \leqslant |b|$, atunci $a + b = |a| - |b|$ este negativ, $|a + b| = -(a + b) = -(|a| - |b|) = |b| - |a| \leqslant |b| \leqslant |a| + |b|$. Dacă a este negativ și dacă b este pozitiv se inversează rolul lui a și b.

Capitolul VI

IDENTITATEA PROPOZIŢIILOR

§ 1. **Identitatea grafică**

În acest capitol vom considera textele scrise într-o limbă dată. Ele sînt formate din anumite semne, care sînt *desenele de litere*. În mulţimea lor $\mathfrak{A}$

a b c	*A B C*	$\mathcal{A}$
a b c	**a b c**	$\mathcal{B}$
A B C	**A B C**	$\mathcal{C}$

ştim să recunoaştem două desene ale aceleiaşi litere. Aceasta introduce o relaţie de echivalenţă, pe care o vom numi *echivalenţă grafică*,

$$\alpha' \equiv_g \alpha'',$$

între elementele lui A

$$a \equiv_g A \equiv_g a \equiv_g \mathbf{a} \equiv_g \mathbf{A} \equiv_g \mathcal{A}.$$

O literă este o clasă de echivalenţă a elementelor lui $\mathfrak{A}$ în raport cu identitatea grafică. Mulţimea A a literelor este *alfabetul*

$$A = \mathfrak{A}/\equiv_g$$

Un desen de cuvînt este o succesiune μ de desene de litere

$$\alpha_1 \qquad \alpha_n,$$

unde $\alpha_i \in \mathfrak{A}$, $\mu \in \operatorname{Seq} \mathfrak{A}$, dar există succesiuni de desene de litere care nu sînt un desen de cuvînt.

Fie $\mathcal{V}$ mulţimea desenelor de cuvînt

$$\mathcal{V} \subset \operatorname{Seq} \mathfrak{A}.$$

Identitatea grafică $\equiv_g$ a două desene de cuvinte relație în $\mathfrak{A}$ generează o relație între elementele lui Seq$\mathfrak{A}$, deci între elementele lui $\mathcal{V} \subset$ Seq $\mathfrak{A}$ pe care o vom numi $\equiv_g$. Clasele de echivalență ale lui $\mathcal{V}$ în raport cu $\equiv_g$ sînt succesiuni m de litere

$$a_1, \qquad a_m,$$

$a_i \in A$, pe care le vom numi *cuvinte*. Mulțimea cuvintelor

$$V = \mathcal{V}/\equiv_g \subset \text{Seq}\,\mathfrak{A}$$

va fi numită *vocabularul*.

În mulțimea Seq $\mathcal{V}$ a succesiunilor de desene de cuvinte, anumite elemente vor fi numite desene de propoziții gramatical corecte:

$$\mu_1 \qquad \mu_m$$

$\mu_i \in \mathcal{V}$. Mulțimea lor $\mathfrak{L}$

$$\mathfrak{L} \subset \text{Seq}\ \mathcal{V} \subset \text{Seq}\ \text{Seq}\ \mathfrak{A}$$

sînt succesiuni ale succesiunilor de desene de litere (două desene de cuvînt sînt separate printr-un spațiu alb, semn care trebuie adăugat alfabetului A). Identitatea grafică în $\mathcal{V}$ induce o relație care va fi numită identitate grafică în $L/\equiv_g$. O *limbă* L este o mulțime de propoziții, o propoziție fiind o clasă de echivalență de desene de propoziții în raport cu identitatea grafică, deci aceasta este o succesiune de cuvinte

$$L = \mathfrak{L}/\equiv_g \subset \text{Seq} \qquad \subset \text{Seq}\ \text{Seq}\ \mathfrak{A}.$$

Printre propozițiile corecte gramatical unele au un sens, altele pot să nu aibă nici unul. Fie S mulțimea propozițiilor nu numai corecte gramatical, dar care mai au și un sens

$$S \subset L.$$

Să considerăm succesiunile de desene de propoziții, elemente ale lui Seq S. Anumite succesiuni alcătuiesc *desene de texte*. Fie $\mathfrak{T}$ mulțimea lor; fie

$$T = \mathfrak{T}/\equiv_g \subset \text{Seq}\ \text{Seq}\ \text{Seq}\ \mathfrak{A}.$$

Elementele lui T sînt textele.

Pe scurt: un om *vede*
— desenele literelor, care formează mulţimea $\mathcal{A}$
— desenele cuvintelor, care formează mulţimea $\mathcal{V}$
— desenele propoziţiilor, care formează mulţimea $\mathcal{L}$
— desenele textelor, care formează mulţimea $\mathcal{T}$.

Un om *citeşte*
— literele care formează mulţimea $\mathcal{A}/\equiv_g = A$
— cuvintele care formează mulţimea $\mathcal{V}/\equiv_g = V$
— propoziţiile care formează mulţimea $\mathcal{L}/\equiv_g = L$
— textele care formează mulţimea $\mathcal{T}/\equiv_g = T$.

În cele ce urmează ne vom ocupa doar de mulţimile A, V, L, S, T.

Un om *recunoaşte* identitatea grafică a desenelor de litere adică relaţia $\equiv_g$ în A. Relaţiile $\equiv_g$ în V, L, S, T sînt *definite* aşa cum am arătat în cap. VII, §4. Apartenenţele $m \in V$, $p \in L$ sînt recunoscute de om datorită competenţei sale gramaticale, dar apartenenţele $p \in S$, $t \in T$, depăşesc gramatica.

Să remarcăm că aceste mulţimi A, V, L trebuie să fie considerate ca mulţimi nuanţate.

Într-adevăr, cînd încercăm să recunoaştem apartenenţa $h \in A$, ne lovim de problema literelor prost scrise; apartenenţa $m \in V$ întîlneşte dificultatea provocată de cuvintele prost scrise (de exemplu într-o telegramă sau avînd greşeli de ortografie) şi apartenenţa $p \in L$ de propoziţiile prost construite într-o limbă (de exemplu propoziţiile construite de un străin).

§2. Identitatea semantică şi informaţională

Între propoziţii pot fi introduse două relaţii de echivalenţă: identitatea de semnificaţie

$$p' \equiv_s p''$$

şi identitatea de informaţie

$$p' \equiv_i p''$$

Omul trebuie să înţeleagă semnificaţia unei propoziţii pentru a putea decide dacă aceste echivalenţe sînt sau nu valabile.

Trebuie să introducem de asemenea şi identitatea de semnificaţie a două cuvinte? Evident, există cuvinte sinonime, dar faptul că există de asemenea o omonimie sau polisemie a aceluiaşi cuvînt în sensul definit mai sus ne interzice să presupunem că fiecare cuvînt aparţine unei singure clase de echivalenţă de semnificaţie. Acesta este motivul pentru care nu vom introduce o relaţie $m' \equiv_s m''$ de sinonimie a cuvintelor m', m''. În fapt, semnificaţia unui cuvînt poate fi decisă urmărind semnificaţia propoziţiei care-l conţine.

Nu se întîmplă oare acelaşi lucru cu semnificaţia unei propoziţii care depinde de semnificaţia textului care o conţine? Cuvintele „ideal", „imaginar", „ordine" au semnificaţii diferite dacă le găsim în propoziţii aparţinînd unui text matematic sau în propoziţii aparţinînd unui text psihologic; semnificaţia propoziţiilor care conţin aceste cuvinte depind de semnificaţia textelor care conţin aceste propoziţii. Iată un exemplu. Să considerăm propoziţiile:

Idealul $\mathfrak{a}$ este divizibil prin idealul $\mathfrak{b}$

şi

Idealul matematic cartezian este subordonat categoriei de cantitate.

Cele două propoziţii ne permit să distingem două semnificaţii ale cuvîntului ideal. Să considerăm propoziţia

Aceste ideale sînt ordonate după puterile lor crescătoare.

Într-un text matematic, această propoziţie înseamnă

Există mai multe ideale (ideal este un termen matematic) $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ care sînt ordonate într-un şir

$$\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$$

astfel încît numerele lor cardinale $NC\,\mathfrak{m}_1, \ldots, NC\,\mathfrak{m}_r$ (termen matematic) să fie ordonate astfel încît

$$NC\mathfrak{m}_1 < NC\,\mathfrak{m}_2 < \ldots < NC\,\mathfrak{m}_r.$$

Într-un text psihologic, această propoziţie poate însemna

> Un om sau o colectivitate are idealuri (ideal artistic, ideal tehnic, ideal ştiinţific) pe care şi le ordonează în funcţie de forţa lor (de convingere sau educativă).

Vedem că polisemia termenului „ideal" poate fi rezolvată la nivelul propoziţiei, dar că ea poate să dea polisemia unei propoziţii şi că polisemia acestei propoziţii nu este rezolvată decît la nivel de text.

Cu toate acestea vom remarca în §3 că o relaţie de identitate a semnificaţiei, care poate avea un interes pentru cuvinte, poate să-l aibă şi pentru *grupurile de cuvinte.*

§3. Conjuncţiile şi grupurile de cuvinte

Conjuncţia „şi" în limba română ne permite să construim, plecînd de la două substantive, o „expresie substantivală" De exemplu:

Petru şi Paul mănîncă;

plecînd de la două verbe construim o „expresie verbală"

Petru *mănîncă şi bea*;

plecînd de la două adjective, ea ne permite să construim o „expresie adjectivală"

Petru este *inteligent şi serviabil*;

plecînd de la două adverbe, construim o „expresie adverbială"

Ne vom întîlni *mîine şi poimîne.*

În sfîrşit, plecînd de la două propoziţii, conjuncţia „şi" permite construirea unei noi propoziţii (vezi §4).

Or, nu este greu de observat că în limba naturală

Petru *și* Paul	$\equiv_s$ Paul *și* Petru ;
mănîncă *și* bea	$\equiv_s$ bea *și* mănîncă ;
inteligent *și* serviabil	$\equiv_s$ serviabil *și* inteligent ;
mîine *și* poimîine	$\equiv_s$ poimîne *și* mîine.

Această proprietate va fi numită *comutativitatea* conjuncției „și" Să remarcăm că dacă în limba naturală

ministrul *și* secretarul $\equiv_s$ secretarul *și* ministrul.

este corectă, totuși nu se mai întîmplă același lucru în limba protocolară în care expresia „secretarul și ministrul" nu mai este corectă.

O a doua observație este aceasta: în limba naturală

Petru *și* Petru ;
mănîncă *și* mănîncă ;
inteligent *și* inteligent ;
mîine *și* mîine

nu sînt corect alcătuite ; vom numi acest fapt principiul *nonidempotenței* ; într-o limbă poetică

el este (și) este tulburător

este corectă.

O a treia remarcă este aceea privind conjuncția cu mai mulți termeni, care are forma

Petru, Ion și Paul ;
mănîncă, bea și fumează ;
inteligent, serviabil și prevenitor ;
astăzi, mîine și poimîne.

Ea admite o lege comutativă care poate fi enunțată cu ușurință.

Observații analoage pot fi făcute asupra conjuncției „sau" Se pot forma astfel de propoziții:

decanul *sau* prodecanul
trebuie să se ducă la această reuniune ;
trebuie să scriu *sau* să telefonez ;
este necesar să fii inteligent *sau* muncitor ;
vòi veni mîine *sau* poimîine.

Pentru această conjuncție „sau" — care are sensul cuvîntului latin *aut* — legea comutativă este valabilă

decanul *sau* prodecanul $\equiv_s$ prodecanul *sau* decanul;
a scrie *sau* a telefona $\equiv_s$ a telefona *sau* a scrie;
inteligent *sau* muncitor $\equiv_s$ muncitor *sau* inteligent;
mîine *sau* poimîine $\equiv_s$ poimîine *sau* mîine.

O altă conjuncție „sau" — sau expresia coordonatoare — care înseamnă „sau cel puțin" — în sensul latinului *vel* — deci „cel puțin unul din doi" are aceeași proprietate de comutativitate, dar este rar întrebuințată fără explicații suplimentare (în ultimul timp se întrebuințează în locul său conjuncția „sau/și")

decanul sau cel puțin prodecanul
trebuie să se ducă la această reuniune $\equiv_s$
$\equiv_s$ decanul sau prodecanul sau amîndoi
trebuie să se ducă la această reuniune $\equiv_s$
$\equiv_s$ decanul sau/și prodecanul
trebuie să se ducă la această reuniune.

Vrem să atragem atenția asupra conjuncției „nici"

nici decanul, *nici* prodecanul
nu se pot duce la această reuniune;
el nu poate *nici* să bea, *nici* să mănînce;
el nu este *nici* inteligent, *nici* muncitor;
nu voi putea veni *nici* mîine, *nici* poimîine.

Formațiile precedente introduc un tip de succesiuni de cuvinte care sînt intermediare între cuvinte și propoziții; le vom numi grupuri de cuvinte. Putem vedea că succesiunile de cuvinte

		și
		sau ...
...,	.. ,	sau cel puțin
nici	nici	nici

au o structură fixă: aceste conjuncții leagă sau substantive, sau adjective, sau verbe, sau adverbe; vom numi aceste succesiuni de cuvinte expresii substantivale, adjectivale, verbale, sau adjectivale; aceste expresii pot fi declinate sau conjugate, ele joacă rolul sintactic de substantive,

verbe, adjective sau adverbe. Am numit studiul lor microsintaxa.

Există alte grupuri de cuvinte, de exemplu acelea formate de un verb la un timp compus sau anumite grupuri formate din pronume și un verb, cu negație, articularea substantivelor

am avut
m-am plimbat
el mi-a spus
el să facă
omul

care trebuie considerate ca un tot.

§4. Conectorii propoziționali

Conjuncțiile „și", „sau", „sau cel puțin", „nici" joacă un rol foarte important în logica propozițiilor.

Să considerăm propoziția:

am citit această carte și mi-a plăcut. (1)

În acest caz vom scrie „&" în locul lui „și" și vom numi „&" *conjuncția*; propoziția (1) va fi scrisă

am citit această carte & mi-a plăcut. (2)

Dacă cele două propoziții sînt propoziții de apartenență, atunci

$$(x \in a) \; \& \; (x \in b) \qquad (3)$$

înseamnă

x aparține simultan
mulțimilor a și b

sau

x aparține unei părți
comune a mulțimilor
a și b.

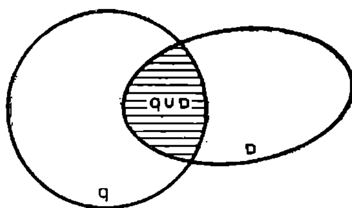


Fig. 14

Partea comună a mulțimilor a și b va fi numită *intersecția* lui a și b și va fi notată $a \cap b$ (fig. 14).

O primă observație pe care vrem să o facem se referă la faptul că aceste două mulțimi pot fi identice; în acest caz $a \cap a$ este mulțimea elementelor comune ale lui a și ale lui însuși, aceasta este deci

$$a \cap a = a. \tag{4}$$

În al doilea rînd, construcția lui $a \cap b$ presupune o anume ordine, dar mulțimea $a \cap b$ este independentă față de ordine

$$a \cap b = b \cap a. \tag{5}$$

În această egalitate semnul „=" este semnul de *egalitate a două mulțimi*; această egalitate a două mulțimi

$$a = b \tag{6}$$

înseamnă: mulțimile a și b au aceleași elemente.

Relația (4) arată cele două propoziții

$$(x \in a) \& (x \in a)$$

și

$$x \in a$$

au aceeași semnificație

$$(x \in a) \& (x \in a) \equiv_s (x \in a). \tag{7}$$

Relația (5) arată că cele două propoziții

$$(x \in a) \& (x \in b)$$

$$(x \in b) \& (x \in a) \tag{8}$$

au aceeaşi semnificaţie

$$(x \in a) \,\&\, (x \in b) \equiv_s (x \in b) \,\&\, (x \in a). \qquad (9)$$

Nu este greu de observat că cele două propoziţii

am citit această carte *şi* această carte mi-a plăcut; (10)

această carte mi-a plăcut *şi* am citit această carte au aceeaşi semnificaţie, deci

am citit această carte *şi* această carte mi-a plăcut $\equiv_s$
$\equiv_s$ mi-a plăcut această carte *şi* am citit această carte. (11)

În general, dacă p' şi p'' sînt două propoziţii

$$p' \,\&\, p'' \equiv_s p'' \,\&\, p' \qquad (12)$$

Să observăm că dacă a doua propoziţie (10) are ceva neobişnuit aceasta se întîmplă din cauză că în prima propoziţie (10) cojuncţia „şi" are un sens temporal sau cauzal.

am citit această carte şi, citind-o, ea mi-a plăcut în aşa fel încît a doua propoziţie (10), care schimbă această ordine cauzală sau temporară nu are sens. Din contră, în (9) nu există nimic insolit, neobişnuit.

Analiza făcută justifică *echivalenţa de sens*

$$p' \,\&\, p'' \equiv_s p'' \,\&\, p' \qquad (I)$$

pe care o vom numi legea comutativă a conjuncţiei.

Analiza propoziţiei (7) ne va conduce să stabilim

$$p \,\&\, p \equiv_s p \qquad (II)$$

ceea ce, din punctul de vedere al desenului propoziţiilor, desenul propoziţiei

$$\pi \text{ şi } \pi,$$

în care $\pi \in \mathfrak{L}$ = mulţimea de desene de propoziţii în limba franceză, nu face parte din $\mathfrak{L}$, π şi $\pi \notin \mathfrak{L}$.

Vom construi o limbă franceză extinsă $\mathfrak{L}_1$ care să cuprindă pe $\mathfrak{L}$ şi toate desenele de propoziţii

$$\pi \text{ şi } \pi$$

cu $\pi \in \mathfrak{L}_1$.

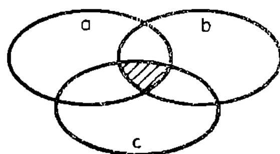


Fig. 15

Fie a, b, c trei mulţimi
Intersecţia (fig. 15).

$$a \cap b \cap c$$

este, prin definiţie, mulţimea punctelor comune ale acestor trei mulţimi. Or, această intersecţie poate fi construită pas cu pas prin două procedee diferite. Se poate construi intersecţia $e = a \cap b$ (fig. 16)
şi intersecţia lui e cu c, ceea ce putem scrie

$$(a \cap b) \cap c$$

sau putem să formăm $f = b \cap c$ (fig. 17)
şi să construim intersecţia $a \cap f = a \cap (b \cap c)$.
Rezultatul este acelaşi

$$(a \cap b) \cap c = a \cap b \cap c, \qquad (*)$$

$$a \cap b \cap c) = a \cap b \cap c, \qquad (**)$$

deci

$$(a \cap b) \cap c = (a \cap b) \cap c. \qquad (***)$$

Relaţia (***) este numită *legea asociativă a intersecţiei.*

Vedem că se poate proceda în două moduri diferite:

I. Primul este definirea directă a intersecţiei celor trei mulţimi $a \cap b \cap c$ ca o mulţime a elementelor comune din a, b şi c şi demonstrarea formulelor (*) şi (**).

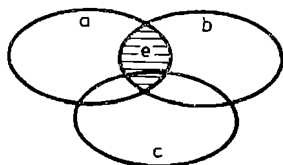


Fig. 16

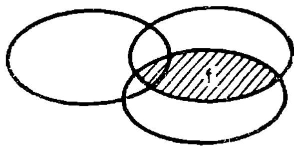


Fig. 17

II. A doua cale este să nu definim decît intersecția a două mulțimi și să constatăm valabilitatea legii asociative (***). Egalitatea (I) definește intersecția $a \cap b \cap c$ și proprietatea (**) este o proprietate care decurge din (***) și din definiția (*).

Această a doua cale este cea urmată de matematicieni.

Odată definită intersecția a două mulțimi, se definește prin recurență:

$$a_1 \cap a_2 \cap a_3 = (a_1 \cap a_2) \cap a_3,$$

$$a_1 \cap a_2 \cap a_3 \cap a_4 = (a_1 \cap a_2 \cap a_3) \cap a_4,$$
$$= ((a_1 \cap a_2) \cap a_3) \cap a_4,$$

$$a_1 \cap \quad \cap a_n = (a_1 \cap \quad \cap a_{n-1}) \cap a_n.$$

Dacă legea asociativă (***) este valabilă, putem, în $a_1 \cap \ . \cap a_n$, să grupăm termenii în orice fel aceasta este o teoremă.

Analiza făcută mai sus ne conduce să postulăm
$((x \in a) \& (x \in b)) \& (x \in c) \equiv_s (x \in a) \& ((x \in b) \& (x \in c))$
și să definim

$$(x \in a_1) \&. \quad \&(x \in a_n) \equiv_s ((x \in a_1) \&. \quad . \&(x \in a_{n-1}))$$
$\&(x \in c))$.

Pentru propoziții oarecare limba naturală scrisă nu are posibilitatea să formeze propozițiile $(p_1 \& p_2)$ $(p_1 \& p_2)$ $\& p_3$ p_3 și $p_1 \& (p_2 \& p_3)$. Dimpotrivă, se poate construi propoziția $p_1 \&$ $\quad \& p_n$ care corespunde succesiunii de desene

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-1} \text{ și } \pi_n,$$

unde π_i sînt desene de propoziții: de exemplu, desenul
am mîncat, am citit, am fumat și am adormit
este construit în acest fel.

Vom extinde limba seminaturală L_1, adăugîndu-i gruparea de cuvinte cu ajutorul parantezelor, după cum se procedează în matematică.

Vom postula deci legea asociativă

$$(p_1 \& p_2) \& p_3 \equiv p_1 \& (p_2 \& p_3). \qquad \text{(III)}$$

Observațiile făcute mai sus pot fi repetate pentru conjuncția *vel*, pe care o vom scrie „$\vee$" și o vom numi *disjuncție*. Ajungem astfel la

$$p' \vee p'' \equiv_s p'' \vee p', \qquad \text{(IV)}$$

$$p \vee p \equiv_s p, \qquad \text{(V)}$$

$$(p_1 \vee p_2) \vee p_3 \equiv_s p_1 \vee (p_2 \vee p_3). \qquad \text{(VI)}$$

Putem de asemenea să arătăm că legile absorbției reuniunii și intersecției mulțimilor:

$$a \cap (a \cup b) = a,$$

$$a \cup (a \cap b) = a,$$

ne conduc să impunem

$$p' \& (p' \vee p'') \equiv_s p', \qquad \text{(VII)}$$

$$p' \vee (p' \& p'') \equiv_s p' \qquad \text{(VIII)}$$

Conectorii „și", *vel* („sau") nu se referă la echivalența grafică, căci

$$\pi' \text{ și } \pi'' \not\equiv_g \pi'' \text{ și } \pi',$$

$$\pi' \textit{ vel } \pi'' \not\equiv_g \pi'' \textit{ vel } \pi',$$

ci numai la echivalența de sens

$$\pi' \text{ și } \pi'' \equiv_s \pi'' \text{ și } \pi',$$

$$\pi' \textit{ vel } \pi'' \equiv_s \pi'' \textit{ vel } \pi',$$

unde $\pi' \in \mathfrak{L}$, $\pi'' \in \mathfrak{L}$ și echivalența de sens „$\equiv_s$" între două elemente ale lui $\mathfrak{L}$ este definită prin

$$\pi' \equiv_s \pi'' \text{ înseamnă că } \pi' \in p', \ \pi'' \in p''$$

$$\text{și } p' \equiv_s p''$$

Rezultă *dacă*

$$p_1 \equiv_s p_2,$$
$$p_3 \equiv_s p_4,$$

atun

$$p_1 \& p_3 \equiv_s p_2 \& p_4,$$
$$p_1 \vee p_3 \equiv_s p_2 \vee p_4.$$

Vom numi această proprietate compatibilitatea lui & și $\vee$ cu $\equiv_s$.

Clasele de propoziții avînd același sens, deci echivalente prin $\equiv_s$, deci mulțimea $P = S/\equiv_s$ sînt elementele care fac obiectul logicii. Anumiți autori dau nume speciale elementelor lui P și elementelor lui L. Noi preferăm să numim

elementele lui L : propoziții în sensul gramaticii,

elementele lui P propoziții în sensul logicii.

Legile de compatibilitate a lui „&", „$\vee$" cu $\equiv_s$ arată că în P se pot introduce două funcții cu două variabile, care vor fi numite & (conjuncție) și $\vee$ (disjuncție) astfel încît :

$$p_1 \& p_2 = p_2 \& p_1, \qquad p_1 \vee p_2 = p_2 \vee p_1,$$
$$(p_1 \& p_2) \& p_3 = p_1 \& (p_2 \& p_3), \qquad (p_1 \vee p_2) \vee p_3 =$$
$$= (p_1 \vee p_2) \vee p_3,$$
$$p_1 \& (p_1 \vee p_2) = p_1, \qquad p_1 \vee (p_1 \& p_2) = p_1.$$

Un triplet $< p, \&, \vee >$ format dintr-o mulțime P și două funcții cu două variabile &, $\vee$ astfel încît sistemul precedent de egalități să fie satisfăcut este numit *latice*. Se presupune egalitatea„=" dată și satisfăcînd legile de compatibilitate.

Capitolul VII

CLASIFICAREA

§1. Clasificarea cu două nivele

Să considerăm o partiţie A (fig. 18),

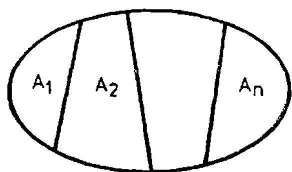


Fig. 18

$$A = \{A_1, \ldots, A_n\},$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad (i \neq j),$$

$$I = A_1 \cup \ldots \cup A_n.$$

Să presupunem că am subîmpărţit mulţimile A_i (fig. 19).

$$A_i = B_{i1} \cup \ldots \cup B_{im_i},$$

$$B_{il} \cap B_{ik} = \emptyset.$$

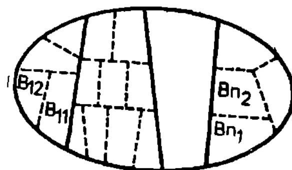


Fig. 19

Mulţimile $B_{11}, \ldots, B_{1m_1}, B_{21}, \ldots, B_{nm_n}$ formează o partiţie a lui I

$$B = \{B_{11}, \ldots, B_{nm_n}\}.$$

Într-adevăr, reuniunea lor este

$$B_{11} \cup \quad \cup B_{1m_1} \cup B_{21} \cup \quad \cup B_{nm_n} =$$

$$= (B_{11} \cup \ldots \cup B_{1m_1}) \cup (B_{21} \cup \ldots \cup B_{2m_2}) \cup \ldots$$

$$\cup (B_{n1} \cup \ldots \cup B_{nm_n}) =$$

$$= A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = I.$$

Mulţimile B_{ih}, B_{jk} sînt disjuncte. Într-adevăr, dacă $i \neq j$,

$$B_{ih} \subset A_i$$

$$B_{jk} \subset A_j,$$

deci

$$B_{ih} \cap B_{jk} \subset A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Dacă $i = j$, atunci

$$B_{ih} \cap B_{ik} = \emptyset.$$

Deci B este o partiţie a lui I.

Partiţia B este obţinută prin subîmpărţirea lui A. Vom arăta că B este mai fină decît A.
Vom scrie

$$B \prec A.$$

Vedem că, *pentru orice mulţime B_{ih} a partiţiei B, există o mulţime A_j a partiţiei A astfel încît*

$$B_{ih} \subset A_j.$$

Reciproc, fie A şi B două partiţii

$$A = \{A_1, \ldots, A_n\},$$

$$B = \{B_1, \ldots, B_r\}.$$

Să presupunem că pentru fiecare B_i există un A_j astfel încît

$$B_r \subset A_j ;$$

în acest caz B provine din A prin subîmpărţire. Într-adevăr, fie B_i şi B_h două mulţimi ale lui B; există A_j, A_k astfel încît $B_i \subset A_j$ şi $B_h \subset A_k$. Se poate întîmpla ca $A_j = A_k$. Să-i considerăm pe toţi B_i conţinuţi într-un A_k dat şi să arătăm că ei alcătuiesc o partiţie a lui A_k. Într-adevăr, ei sînt doi cîte doi disjuncţi. Pe de altă parte, dacă $a \in A_k$, există un B_j astfel încît $a \in B_j$. Vom arăta că $B_j \subset A_k$. Într-adevăr, $B_j \subset A_h$, unde A_k este una dintre mulţimile A, deci $a \in A_k$. Dacă $A_h \neq A_r$, atunci $A_h \cap A_k = \emptyset$; dar $a \in A_h$, $a \in A_k$, deci $a \in A_h \cap A_k$, ceea ce este absurd. Deci $A_h = A_k$ şi $B_j \subset A_k$. Deci orice element al lui A_k se găseşte într-un $B_j \subset A_k$. Deci reuniunea acelor $B_j \subset A_k$ este A_k. Deci mulţimile lui B provin dintr-o subîmpărţire a celor din A. Deci

Pentru a avea

$$B \prec A$$

este suficient ca pentru oricare B_i *să existe un* A_j *cu*

$$B_i \subset A_j.$$

Fie $E(A)$, $E(B)$ relaţiile de echivalenţă asociate partiţiilor A, B. Dacă

$$B \prec A$$

atunci din $aE(B)b$ obţinem $aE(A)b$. Într-adevăr, dacă $aE(B)b$ atunci există un B_i astfel încît $a \in B_i$; $b \in B_i$, dar pentru B_i există A_j astfel încît $B_i \subset A_j$, deci $a \in A_j$, $b \in A_j$, deci $aE(A)b$.

§2. Implicaţia relaţiilor

Fie două partiţii A şi B cu

$$B \prec A.$$

Am arătat că

dacă $aE(B)b$ *atunci* $aE(A)b$.

Atunci cînd pentru două relaţii R_1 şi R_2 propoziţia

dacă aR_1b *atunci* aR_2b

este adevărată, vom scrie

$$R_1 \Rightarrow R_2$$

şi spunem că R_1 *implică* R_2. Relaţia „$\Rightarrow$" între două relaţii R_1 şi R_2 va fi numită *implicaţia* relaţiilor.

Există deci echivalenţă între

$$B \prec A \text{ şi } E(B) \Rightarrow E(A)$$

pentru două partiţii A, B; putem enunţa această proprietate spunînd că există echivalenţă între cele două propoziţii

$$E_2 \Rightarrow E_1 \text{ şi } P(E_2) \Rightarrow P(E_1);$$

vom numi

$$P_1 = P(E_1)$$

$$P_2 = P(E_2).$$

Pentru că propoziţia

dacă aRb *atunci* aRb

este adevărată pentru orice relaţie R, avem legea *reflexivităţii implicaţiei* relaţiilor

pentru orice relaţie $R : R \Rightarrow R$.

Să presupunem că

$$R \Rightarrow S \text{ şi } S \Rightarrow R.$$

În acest caz propoziţiile

aRb, aSb

sînt echivalente,

ceea ce vrea să spună

aRb şi aSb sînt

în acelaşi timp adevărate

şi în acelaşi timp false.

S-a convenit să se scrie în acest caz

$$R \Leftrightarrow S$$

dar putem în acelaşi timp scrie

$$R = S.$$

Vor fi întrebuinţate amîndouă modurile de scriere. Avem deci *legea antisimetriei*

$$\text{dacă } R \Rightarrow S \text{ şi } S \Rightarrow R$$

$$\text{atunci } R = S.$$

Am definit relaţia „$\prec$" între partiţii scriind $B \prec A$ dacă B provine din A prin subîmpărţire. De fapt putem considera de asemenea *subîmpărţirea identică*

$$B_1 = A_1$$

$$B_n = A_n$$

şi vom avea *legea reflexivă*

$$A \prec A.$$

Să remarcăm că partiţia este definită ca o mulţime de submulţimi ale lui I

$$A = \{A_1, \ldots, A_n\}.$$

Ea rămîne aceeaşi dacă mulţimile $A_1, \ldots, A_n$ au fost aranjate într-o ordine diferită

$$A = \{A_{\pi(1)}, \ldots, A_{\pi(n)}\}^*,$$

unde π este o permutare a numerelor $1, \ldots, n$.

---

* Spunem că $\pi(1), \ldots, \pi(n)$ este o permutare a lui $1, \ldots, n$ dacă $\pi(1), \ldots, \pi(n)$ sînt numerele $1, \ldots, n$ aranjate într-o altă ordine. De exemplu,

1, 10, 12, 2, 3, 7, 15, 4, 11, 5, 6, 8, 13, 14, 9 (*)

este o permutare a numerelor

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. (**)

Permutarea identică este aceea care nu schimbă ordinea. De exemplu,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 (***)

este permutarea identică a şirului (**).

§3. Exemplu

Să numim $\equiv_1$ relaţia de echivalenţă descrisă la cap. IV, § 2 şi $\equiv_2$ relaţia de echivalenţă definită după cum urmează:

a. $\equiv_2$ este reflexivă şi simetrică,

b. $1 \equiv_2 10,\ 2 \equiv_2 7,\ 3 \equiv_2 15,\ 4 \equiv_2 11,\ 5 \equiv_2 8,$

$5 \equiv_2 13,\ 6 \equiv_2 14,\ 8 \equiv_2 13.$

Ea dă clasele de echivalenţă următoare

$\{1,10\},\ \{2,7\},\ \{3,15\},\ \{4,11\},\ \{5,8,13\},\ \{6,14\},\ \{9\},\{12\}.$

Vedem că E_2 dă o subdiviziune a lui E_1, căci

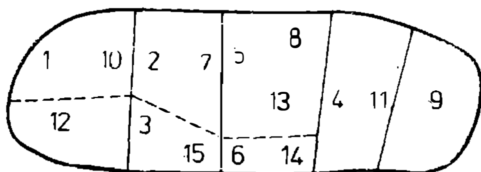


Fig. 20

clasele sînt cele din fig. 20. Avem

$$\{1, 10\} \subset \{1, 10, 12\},$$

$$\{12\} \subset \{1, 10, 12\},$$

$$\{2, 7\} \subset \{2, 3, 7, 15\},$$

$$\{3, 15\} \subset \{2, 3, 7, 15\},$$

$$\{5, 8, 13\} \subset \{5, 6, 8, 13, 14\},$$

$$\{6, 14\} \subset \{5, 6, 8, 13, 14\},$$

$$\{4, 11\} \subset \{4, 11\},$$

$$\{9\} \subset \{9\}.$$

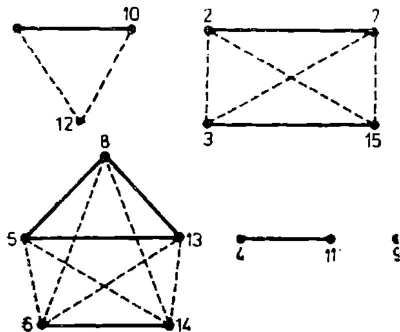


Fig. 21

Clasele din stînga sînt cele ale lui $\equiv_2$, cele din dreapta sînt clasele lui $\equiv_1$.

Vedem că

$$(\equiv_2) \Rightarrow (\equiv_1).$$

Grafurile celor două relaţii sînt date în fig. 21, unde liniile pline reprezintă $\equiv_2$, iar cele pline sau punctate $\equiv_1$.

§4. Matricea asociată

Să construim matricea elementelor c_{ij} definite după cum urmează

dacă $i \equiv_2 j$ atunci $c_{ij} = 1$,

dacă $i \equiv_1 j$ dar $i \not\equiv_2 j$ atunci $c_{ij} = \dfrac{1}{2}$,

dacă $i \not\equiv_1 j$ atunci $c_{ij} = 0$.

Pentru cele două relaţii din § 3 această matrice este

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0
2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
3	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0
6	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0
7	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
8	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0
11	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
12	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0
13	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0
14	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0
15	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	1

Putem proceda ca la cap. IV, § 6 pentru a ajunge la o formă canonică. Totuşi se pot urma două căi diferite.

rima cale este de a forma blocuri conținînd pe 1

1	10	2	7	3	15	4	11	5	8	13	6	14	9	12
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
0	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0,	0		0	1

se continuă de a borda aceste blocuri prin dreptunghiuri conținînd pe $\frac{1}{2}$

	1	10	12	2	7	3	15	4	11	5	8	13	6	14	9
11	1	1	$\frac{1}{2}$												
10	1	1	$\frac{1}{2}$												
12	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1												
2				1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$								
7				1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$								
3				$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1								
15				$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1								
4								1	1						
11								1	1						
5										1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
8										1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
13										1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
6										$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	
14										$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	
9															1

căsuțele goale trebuie umplute cu 0.

O a doua cale este următoarea: Se formează blocuri care să nu conțină decît pe 1 și $\frac{1}{2}$.

1	10	12	2	3	7	15	4	11	5	6	8	13	14	9
1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

continuare se rearanjează căsuţele care conţin elenenule. Se obţine aceeaşi matrice.

§5. Clasificarea cu trei nivele

Să considerăm trei partiţii A, B, C şi să presupunem că

$$B \prec A$$

$$C \prec B.$$

Vom arăta că

$$C \prec A.$$

Într-adevăr, $C \prec B$ înseamnă că pentru fiecare C_i al partiţiei C există un B_j al partiţiei B astfel încît

$$C_i \subset B_j.$$

Or, $B \prec A$ înseamnă că pentru fiecare $B_j \in B$ există un $A_e \in A$ astfel încît

$$B_j \subset A_e$$

deci, incluziunea mulţimilor fiind tranzitivă,

$$C_i \subset A_e,$$

deci $C \prec A$.

Avem de asemenea *proprietatea tranzitivităţii*

dacă $B \prec A$

şi $C \prec A$

atunci $C \prec A$.

Trei partiţii dau o clasificare cu trei nivele (fig. 22).

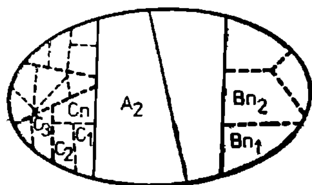


Fig. 22

§6. Clasificarea cu mai multe nivele. Extensia ideii de elasificare

Nu este dificil să trecem la cazul cu mai multe nivele. Fie $n - 1$ partiţii

$$P_1 \succ P_2 \succ \quad \succ P_{n-1}.$$

Ele sînt definite prin n relaţii de echivalenţă

$$E_{n-1} \Rightarrow E_{n-2} \Rightarrow \quad \Rightarrow E_1.$$

Nu există dificultăţi să extindem această idee la o mulţime de partiţii

$$P_a,$$

unde a este unul dintre indicii $< \alpha + >$ sau $< \alpha - >$, α fiind un număr real cu $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, cu

I. $P_{\alpha+} \prec P_{\alpha-}$,

II. dacă $\alpha < \beta$ atunci

$$P_{\beta-} \prec P_{\alpha+}.$$

Aceasta înseamnă că vom construi o mulţime de relaţii de echivalenţă

$$\{\equiv_a\},$$

unde $a \in K(L_\lambda)$ cu

I. $(\equiv_{\alpha+}) \Rightarrow (\equiv_{\alpha-})$,

II. dacă $\alpha < \beta$ atunci

$$(\equiv_{\beta-}) \Rightarrow (\equiv_{\alpha+}).$$

Se poate da o semnificaţie unor asemenea sisteme de partiţii şi de relaţii de echivalenţă?

Pentru uniformizarea limbajului, vom spune că avem de-a face cu o clasificare cu L_λ nivele.

Cazul L_ρ-valent este analog.

Capitolul VIII

LOGICA RELAŢIILOR

§1. Judecăţile de relaţie

Ideea clasică care afirmă că orice judecată este atribuirea unui predicat unui subiect este departe de a fi adecvată studiului propoziţiilor. Să luăm predicatul „mare". Propoziţiile

Socrate este mare;
Socrate este foarte mare;
Socrate este imens de mare;
Socrate este inimaginabil de mare;

Socrate este enorm

sînt propoziţii de tip

$$A(a),$$

adică de tipul

individul *a* are proprietatea *A*.

Dimpotrivă, propoziţiile:

Socrate este mai mare decît Cicero;
Socrate este mai puţin mare decît Cicero;
Socrate este tot atît de mare ca şi Cicero
Socrate este cel puţin atît de mare ca Cicero;
Socrate este cel mult atît de mare ca Cicero;
Socrate este cu mult mai mare decît Cicero;
Socrate este mult mai puţin mare decît Cicero

sînt propoziţii de relaţie

$$R(a,b),$$

adică de tip

indivizii a şi b sînt
în relaţia R

sau, mai bine, căci ordinea contează*

individul a este în
relaţia R cu individul b.

Logica predicatelor a fost construită de Aristotel. Logica relaţiilor n-a fost construită decît în cadrul logicii matematice.

Acum se poate preciza teoria gradelor de comparaţie ale adjectivelor; un adjectiv poate să indice:

α) Un predicat. Este situaţia adjectivelor la gradul pozitiv sau la superlativ absolut format în maniera clasică (cu „foarte") sau cu un adverb (aşa ca „imens" etc.), schimbînd cuvîntul (mare — enorm) sau, în italiană, cu un sufix (grande — grandissimo);

β) O relaţie, folosind cuvintele „mai", „puţin", „tot atît", „cel puţin atît", „cel mult atît", „mult mai mult", „mult mai puţin";

γ) Un nume. Este cazul superlativului relativ

cel mai mare om din Atena
omul cel mai puţin sensibil la linguşire

sau cu un superlativ absolut

cel mai mare filozof din Atena.

În gîndirea lui Aristotel orice propoziţie se poate reduce la o propoziţie de predicaţie. În gîndirea matematică modernă există propoziţii de predicaţie

$$A(a)$$

cu predicatul monar A, propoziţii de relaţie binară, de tipul studiat mai sus

$$R(a,b)$$

---

* Se numeşte *transpusă* sau *reciprocă* a relaţiei binare R relaţia $\bar{R}$ sau $\breve{R}$ definită prin

$$\tilde{R}(a,b) \text{ înseamnă } R(b,a)$$

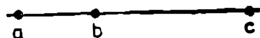


Fig. 23

— pe care îl vom scrie de asemenea

$$aRb$$ —

dar de asemenea propoziţii care fac să intre relaţii ternare

$$R(a,\ b,\ c)$$

şi în general propoziţii de relaţii n-are

$$R(a_1, \ldots, a_n).$$

Ca exemplu de propoziţii ternare vom da următoarele

Bologna se află între Roma şi Padova

şi în general propoziţiile cu relaţii de separaţie liniară (fig. 23)

punctul b se află între
punctele a şi c

$a < b < c$

şi cu aceea de ordine ciclică (fig. 24)

Ca exemplu de relaţie cuaternară vom da relaţia de separaţie ciclică (fig. 25)

punctele a şi c separă
punctele b şi d.

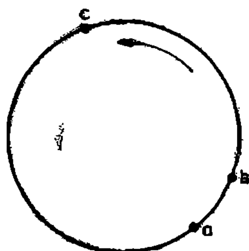


Fig. 24

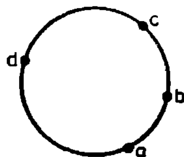


Fig. 25

Cea mai mare parte a propozițiilor exprimă relații, de exemplu

Ion a plecat luni de la Bologna la
Neapole, trecînd prin Roma

are schema

R(Ion, luni, Bologna, Neapole, Roma),

unde R este relația

a plecat   de la   la   trecînd prin

În capitolele III, IV și V am studiat o relație binară, relația de identitate „=" și o categorie de relații binare, relațiile de echivalență. Vom relua pe scurt ideile expuse în aceste capitole, extinzîndu-le la relații oarecare.

Fie R o relație binară între elementele unei mulțimi I. Să presupunem I finită:

$$I = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

și o relație binară R între elementele lui I. Această relație R poate fi reprezentată printr-un tablou în care să fie scrise toate propozițiile $a_i \; R \; a_j$ adevărate. De exemplu, dacă

$$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 120\},$$

vom scrie relația

$1 \; R \; 1$, $1 \; R \; 2$, $1 \; R \; 3$, $1 \; R \; 4$, $1 \; R \; 5$, $1 \; R \; 6$, (*)
$2 \; R \; 2$, $2 \; R \; 4$, $2 \; R \; 6$, $3 \; R \; 3$, $3 \; R \; 6$, $4 \; R \; 4$,
$5 \; R \; 5$, $6 \; R \; 6$, $1 \; R \; 120$, $2 \; R \; 120$, $3 \; R \; 120$, $4 \; R \; 120$,
$5 \; R \; 120$, $6 \; R \; 120$, $120 \; R \; 120$.

O a doua observaţie este următoarea : relaţia R se poate reprezenta printr-o matrice, adică printr-un tablou pătrat

R	a_1	j	a_n
a_1			
i		c_{ij}	
a_n			

nscriind la intersecţia liniei i cu coloana j elementul c_{ij} :

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } a_i \, R \, a_j \text{ este adevărată} \\ 0 \text{ dacă } a_i \, R \, a_j \text{ este falsă.} \end{cases}$$

De exemplu matricea asociată relaţiei scrise mai sus este

	1	2	3	4	5	6	120
1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	1
3	0	0	1	0	0	1	1
4	0	0	0	1	0	0	1
5	0	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	0	0	1	1
120	0	0	0	0	0	0	1

Un element p astfel încît pentru orice $x \in I$ să avem

$$p \, R \, x$$

va fi numit un prim element. În matricea asociată lui R linia primului element nu are decît 1-uri.

Un element d astfel încît pentru orice $x \in I$ să avem

$$x \, R \, d$$

va fi numit un ultim element. În matricea asociată lui R coloana ultimului element este formată din 1.

Primul element şi ultimul element pot să nu fie unici. Exemplu

	a	b	c
a	1	1	1
b	1	1	1
c	0	1	1

Avem: $a\,R\,x$, $b\,R\,x$ şi $x\,R\,b$, $x\,R\,c$, pentru orice x.

Se poate asocia fiecărei relaţii un graf orientat; dacă

$$a \ R \ b \text{ este valabilă}$$

vom scrie

$$a \rightarrow b.$$

De exemplu, relaţia dată prin (*) şi (**) are graful din fig. 26.

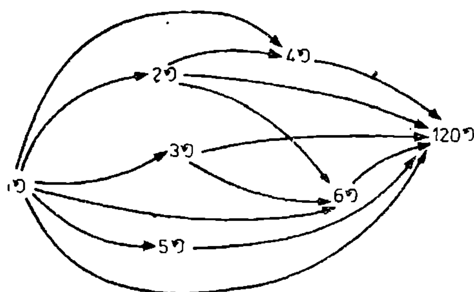


Fig. 26

Buclele

$$a \ R \ a$$

vor fi desenate ca în fig. 27.



Fig. 27

Graful asociat în cap.IV, §5 unei relaţii de echivalenţă era neorientat; în general pentru o relaţie simetrică se pot întrebuinţa grafuri neorientate. Într-adevăr, în graful orientat asociat unei relaţii oarecare pot exista opriri simple şi opriri duble. De exemplu, graful din fig. 28, care reprezintă relaţia definită prin

$$a\,R\,b,\ b\,R\,a,\ a\,R\,c,\ b\,R\,c,$$

are o oprire dublă care corespunde perechilor de propoziţii valabile

$$a\ R\ b, \qquad b\ R\ a.$$

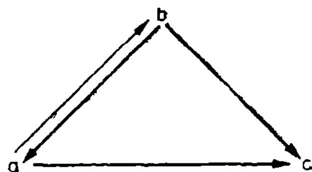


Fig. 28

Într-o relaţie simetrică propoziţiile $x\,R\,y$ şi $y\,R\,x$ sînt echivalente, deci graful orientat care îi este asociat ar trebui să aibă toate opririle duble. Iată pentru ce putem să-l înlocuim printr-un graf neorientat.

§2. Reducerea judecăţilor de relaţie la judecăţi de predicaţie

Este clar că propoziţiile de apartenenţă

$$a \in \alpha$$

sînt propoziţii de relaţie de o formă particulară, conţinînd relaţia de apartenenţă $\in$.

Judecăţile de predicaţie

$$A(a)$$

exprimă o relație π_1 între subiectul a și predicatul A; ele pot fi scrise

$$\pi_1(a, A).$$

Dar astfel de propoziții exprimă o relație între a, A și relația binară π_1; propoziția precedentă poate fi scrisă

$$\pi_2(a,\ A,\ \pi_1).$$

Acest mod de gîndire poate fi prelungit la infinit.

Problema care se poate pune este următoarea se pot reduce judecățile de relație la judecăți de predicație?

Să considerăm toate perechile $\langle a, b \rangle$, astfel încît $a\ R\ b$. Aceste perechi formează mulțimea:

$$\rho = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 1, 5\rangle, \langle 1, 6\rangle, \langle 1, 120\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 2, 120\rangle, \langle 3, 6\rangle, \langle 3, 120\rangle, \langle 4, 120\rangle, \langle 5, 120\rangle, \langle 6, 120\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 5, 5\rangle, \langle 6, 6\rangle, \langle 120, 120\rangle\}.$$

Această mulțime ρ este o submulțime a mulțimii $I \times I$, care este formată din toate perechile $\langle a, b\rangle$, ordonate, cu elemente în I.

Deci se poate da tuturor propozițiilor de relație binară

$$a\ R\ b$$

forma aristoteliciană de propoziție de predicație în extensie

$$\langle a, b\rangle \in \rho$$

cu condiția de a introduce *ideea de pereche ordonată.*

Perechea posedă proprietatea esențială

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \text{ echivalează cu } a = c \text{ și } b = d.$$

Evident, această idee de pereche poate fi redusă la aceea de mulțime, căci perechea $\langle a, b\rangle$ poate fi înlocuită prin mulțimea

$$\{a,\ \{a, b\}\}$$

ordonată prin relația de apartenență

$$a \in \{a, b\}$$

sau prin mulţimea

$$\{\{a\}, \{a,b\}\}$$

ordonată prin incluziunea

$$\{a\} \subset \{a,b\}.$$

Şirurile finite

$$<a_1, . . ., a_n>$$

sînt, prin definiţie,

$$< . . . <<a_1, a_2>, a_3> . . . >, a_n> \quad >$$

Se vede că această reducţie este departe de a fi simplă.

§3. Produsul cartezian

Mulţimea perechilor ordonate $<a, b>$, atunci cînd a parcurge mulţimea A şi b mulţimea B este numită produsul cartezian:

$$A \times B.$$

În particular, mulţimea perechilor de elemente din I formează mulţimea I^2.

Dacă mulţimea I este un segment, I^2 este un pătrat (fig. 29).

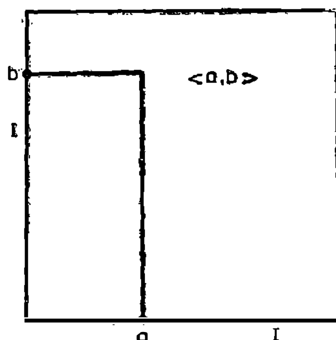


Fig. 29

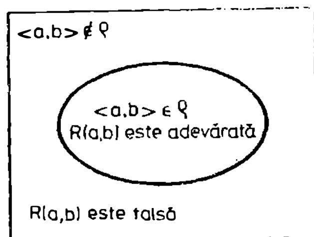


Fig. 30

O relație R între elementele lui I fiind o mulțime de perechi, poate fi reprezentată, așa cum am mai spus, prin mulțimea ρ de perechi de elemente ale lui I, deci ca o submulțime a lui I^2 (fig. 30) care va fi numită graficul relației.

Relația de egalitate este reprezentată prin perechile $<c, c>$, deci prin *diagonala* Δ a pătratului (fig. 31).

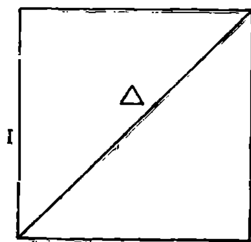


Fig. 31

Dacă se consideră partiția lui I în clase de echivalență, graficul acestei relații de echivalență poate fi redus la acela din fig. 32. El este format dintr-un șir de pătrate eșalonate în lungul diagonalei. Faptul că acest grafic conține diagonala corespunde reflexivității relației și faptul că el este simetric în raport cu diagonala corespunde simetriei sale (fig. 33).

Interpretarea tranzitivității este mai complicată. Să considerăm pătratul $ABCD$ din fig. 34, unde

A este punctul $<p,p>$
B este punctul $<p,q>$
C este punctul $<q,p>$
D este punctul $<q,q>$.

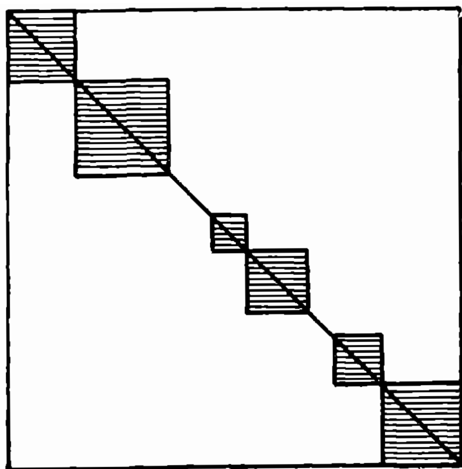


Fig. 32

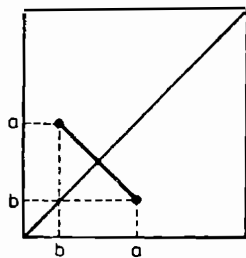


Fig. 33

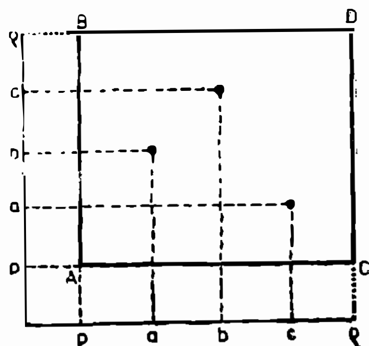


Fig. 34

Dacă două puncte

$$<a, b> \quad \text{și} \quad <b, c>$$

sînt în pătratul $ABCD$, punctul

$$<a, c>$$

va fi de asemenea acolo. Într-adevăr, $<a, b>$ și $<b, c>$ sînt în pătratul $ABCD$ dacă

$$p \leqslant a \leqslant q \quad p \leqslant b \leqslant q \quad p \leqslant c \leqslant q,$$

deci $<a, c>$ este un pătrat.

§4. Propozițiile de relație în logica cu mai multe valori

O propoziție de relație

$$a A b$$

sau

$$<a, b> \in \mathbf{a}$$

cu trei valori poate fi înțeleasă ca orice propoziție de apartenență în logica cu trei valori, considerînd aici două mulțimi

$$\mathbf{a}_2 \subset \mathbf{a}_1 \subset I \times I.$$

Aceasta ne conduce la două relații bivalente:

$$aA_1b \text{ este adevărat dacă } <a, b> \in \mathbf{a}_1;$$

$$aA_2b \text{ este adevărat dacă } <a, b> \in \mathbf{a}_2.$$

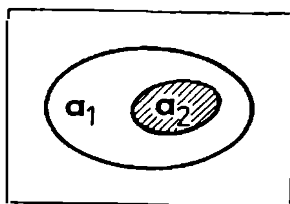


Fig. 35

Or, incluziunea $\mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_1$ arată că

dacă aA_2b atunci aA_1b,

deci

$$A_2 \Rightarrow A_1.$$

Deci orice relaţie în logica cu trei valori corespunde unei perechi de relaţii $\langle A_2, A_1 \rangle$ în logica cu două valori cu $A_2 \Rightarrow A_1$. Astfel am considerat perechile $\langle \equiv_2, \equiv_1 \rangle$ relaţii de echivalenţă.

Aceasta înseamnă că

aA_1b este adevărată dacă $V_{\text{III}}(aAb) \geqslant \frac{1}{2}$;

aA_2b este adevărată dacă $V_{\text{III}}(aAb) = 1$.

Se poate, în acelaşi fel, asocia în logica n-valentă oricărei relaţii binare A, un sistem de $n-1$ relaţii binare în logica bivalentă $A_1, \ldots, A_{n-1}$, astfel încît

$$A_{n-1} \Rightarrow A_{n-2} \Rightarrow \qquad \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_1$$

prin

aA_1b este adevărată dacă $V_n(aAb) \geqslant \frac{1}{n-1}$,

aA_2b este adevărată dacă $V_n(aAb) \geqslant \frac{2}{n-1}$

$aA_{n-1}b$ este adevărată dacă $V_n(aAb) = 1$.

În sfîrşit, în logica cu valori în L_λ vom asocia relaţiei binare n-valente A relaţiile binare bivalente A_α prin

$aA_{\alpha-}b$ este adevărată dacă $V_\lambda(aAb) \geqslant \alpha$;

$aA_{\alpha+}b$ este adevărată dacă $V_\lambda(aAb) > \alpha$.

Definiţii asemănătoare pot fi date pentru relaţiile n-are.

Capitolul IX

COMPATIBILITATEA

§1. Compatibilitatea unui predicat cu o partiție

Să considerăm partiția P generată de relația de echivalență $\equiv$ și un predicat A cu extensia sa **a**. Se poate întîmpla ca **a** să fie formată de toate clasele partiției P (fig. 36, a), dar se poate, de asemenea, întîmpla ca **a** să fie formată de o parte din clasele lui P (fig. 36, *b*).

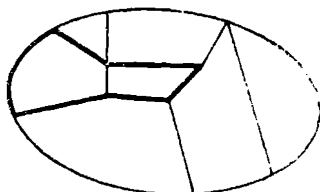


Fig. 36,a

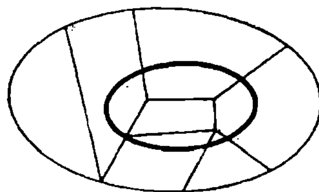


Fig. 36,b

În primul caz vom spune că P și A — sau $\equiv$ și A — sînt compatibile. Se vede că condiția de compatibilitate este

$$\text{dacă } a \in \mathbf{a} \quad \text{și} \quad a \equiv b \quad \text{atunci } b \in \mathbf{a}$$

sau

$$\text{dacă } A(a) \quad \text{și} \quad a \equiv b \quad \text{atunci} \quad A(b).$$

Lemă. Dacă predicatul A este compatibil cu relația de echivalență $\equiv$, faptul că $A(a)$ este adevărată sau falsă nu depinde decît de clasa de echivalență căreia îi aparține a.

Într-adevăr, fie $\hat{a}$ o clasă de echivalență, $a \in \hat{a}$; dacă $A(a)$ este adevărată, pentru oricare $x \in \hat{a}$ sau $x \equiv a$, deci $A(x)$ este adevărată.

Deci

$V_{II}(A(x))$ *este constantă* pentru $x \in \hat{a} \in I/\equiv$.

Exemple. Fie $\equiv$ relaţia de asemănare şi fie $P_1(F)$ propoziţia: figura F este un triunghi echilateral; $P_2(F)$ propoziţia: figura F este un cerc, $P_3(F): F$ este un triunghi, cele trei laturi ale sale avînd fiecare 2 cm lungime.

Dacă $F \equiv F'$, deci dacă F este asemenea cu F', atunci dacă $P_1(F)$, deci dacă F este un triunghi echilateral, F' este un triunghi echilateral, deci $P_1(F')$; dacă $P_2(F)$, deci dacă F este un cerc, atunci F' este un cerc, deci $P_2(F')$.

Dimpotrivă, dacă $P_3(F)$, deci dacă F are cele trei laturi de 2 cm, şi dacă $F \equiv F'$, deci dacă P' este asemenea cu F, F' poate avea cele trei laturi de o lungime oarecare, deci aceste laturi pot avea 2 cm sau pot să nu aibă această lungime, deci $P_3(F')$ poate să fie sau poate să nu fie valabilă.

Deci P_1, P_2 sînt proprietăţi compatibile cu relaţia de echivalenţă „asemănarea", în timp ce P_3 nu este.

Să definim un predicat $\hat{A}(\hat{x})$ pentru elementele $\hat{x} \in I/\equiv$ prin cele două condiţii echivalente

I. Există un $z \in \hat{x}$ astfel încît $A(z)$;

II. Pentru oricare $z \in \hat{x}$ avem $A(z)$.

Echivalenţa condiţiilor I şi II poate fi uşor demonstrată. Din II se deduce I imediat. Dacă I este adevărată, fie $z_0 \in \hat{z}$ cu $A(z_0)$. Pentru oricare $z \in \hat{z}$ avem, $\hat{z}$ fiind o clasă de echivalenţă, $z \equiv z_0$, deci A fiind compatibilă cu $\equiv$, avem $A(z)$, deci II este demonstrată. Vom scrie în locul lui $\hat{A}$

$$A/\equiv.$$

Să încercăm să aprofundăm construcţia lui $A/\equiv$. Fie

$$I/\equiv = \{\alpha_1, . \; . , \alpha_r\}.$$

Vom numi $A_a(\alpha)$ proprietatea lui α care este

$$a \in \alpha \quad \text{şi} \quad A(a). \qquad (*)$$

Vedem că $A_a(\alpha)$ nu depinde de a, ceea ce înseamnă că, considerînd propoziţia

$$b \in \alpha \quad \text{şi} \quad A(b) \qquad (**)$$

avem

$$\text{dacă } a \in \alpha, \quad b \in \alpha \quad \text{atunci}$$

$$A_a(\alpha) \text{ echivalent cu } A_b(\alpha),$$

deci $A_a(\alpha)$ depinde de α dar nu de modul de alegere al lu a în α.

Aceste idei pot să elucideze o problemă de la frontiera dintre logică şi gramatică*. Să considerăm propoziţia

omul este biped. (1)

Fie B predicatul „biped" deci

$$B(a) \qquad (2)$$

înseamnă

individul a este biped (3)

de exemplu

$$B(\text{Cajus}) \qquad (4)$$

este transcripţia pentru

Cajus este biped. (5)

Fie β mulţimea tuturor indivizilor care au proprietatea B, deci

$$a \in \beta \qquad (6)$$

traduce în extensie propoziţia (2) ; de exemplu

$$\text{Cajus} \in \beta \qquad (7)$$

este transcripţia în extensie a propoziţiei (4).

Introducînd mulţimea α a oamenilor, transcripţia în extensie a lui (1)

oamenii sînt bipezi (8)

sau

mulţimea oamenilor este
inclusă în mulţimea (9)
bipezilor

* Analiza care urmează nu a fost expusă în lecţiile orale.

poate fi scrisă în mod simbolic

$$\alpha \subset \beta. \tag{10}$$

Restrîngerea lui (8) este

orice individ care este om

este biped, (11)

deci trebuie să introducem predicatul om, care va fi notat H, $H(a)$ însemnînd: a este om.

Propoziția (11) va fi scrisă:

pentru orice individ x dacă

(12)

$H(x)$ atunci $B(x)$.

Toate aceste forme nu pot transcrie propoziția (1). Într-adevăr, în propoziția (1) subiectul este

om (13)

conceptul de „om" ca atare, în timp ce în formele (2) — (7) intervine un exemplar al mulțimii oamenilor, mulțime care apare în (8) — (12) și care este definită în restrîngere în (11) — (12).

Să considerăm partiția mulțimii I a vertebratelor în șase submulțimi $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_5$ care sînt acelea ale:

oameni
mamifere non-oameni
păsări (14)
reptile
batracieni
pești.

Numai oamenii și păsările sînt bipezi, deci predicatul B este compatibil cu această partiție, mulțimea bipedelor

$$\beta = \alpha \cup \alpha_2 \tag{15}$$

fiind formată de toate clasele partiției. Dacă $\equiv$ este echivalența asociată de

$$I/\equiv\, = \{\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\} \tag{16}$$

predicatul $\hat{B}$ se exprimă prin același cuvînt „biped", dar structura logică a propozițiilor (2) — (7) este diferită de aceea a propozițiilor (1) și (17) care sînt adevărate și de aceea lui (18), care este falsă:

pasărea este bipedă; (17)

peștele este biped. (18)

Propozițiile (1), (17), (18) sînt

$$\hat{B}(\alpha),\ \hat{B}(\alpha_2),\ \hat{B}(\alpha_5)$$

ele introduc predicatul

$$\hat{\boldsymbol{B}} = B/\equiv$$

și nu predicatul $\boldsymbol{B}$. Acest predicat $\hat{B}$ are drept subiect clasa α (sau „numele clasei α").

Trebuie să insistăm asupra faptului următor: predicatul $\hat{\boldsymbol{B}}$ poate să nu aibă sens pentru o partiție care nu este compatibilă cu predicatul B.

Să considerăm partiția lui I

$$P^* = \{\alpha,\ \bar{\alpha}\}$$

în mulțimea α a oamenilor și mulțimea $\bar{\alpha}$ a non-oamenilor.

Predicatul „biped" nu este compatibil cu această partiție P^* (sau cu echivalența asociată, care va fi desemnată prin $\equiv^*$). Într-adevăr, dacă $a \in \bar{\alpha}$, $b \in \bar{\alpha}$, atunci $a \equiv^* b$; or, dacă a este o pasăre, avem $\boldsymbol{B}(a)$ — ea este bipedă — și nu este om; dacă b este un pește, el nu este om, deci $a \equiv^* b$, dar el nu este biped; deci $a \equiv^* b$ și $\boldsymbol{B}(a)$ sînt adevărate, dar $\boldsymbol{B}(b)$ este falsă. Deci nu putem construi un predicat $\hat{B}$ pentru elementele lui P^*.

Vedem că nu se poate spune că $\hat{B}$ are un sens pentru o clasă; el nu are sens nici pentru $\bar{\alpha}$. $\hat{B}$ are un sens pentru o clasă, dacă o considerăm ca o clasă de echivalență a unei relații de echivalență care trebuie să fie precizată (sau a unei partiții care trebuie să fie precizată), de îndată ce această partiție este compatibilă cu predicatul $\boldsymbol{B}$.

Acest fapt este important.

Într-adevăr, există predicate care au ca subiect clasele:

a fi vid;

a avea un element.

Acestea sînt predicate astfel încît propoziţiile de mai jos au un sens, căci dacă ξ este o mulţime

ξ este vidă;

ξ are un element

au un sens.

Nu mai este acelaşi lucru pentru predicatul $\hat{B}$, pentru care propoziţia $\hat{B}(\xi)$ este golită de semnificaţie dacă ξ nu este o clasă de echivalenţă în raport cu o relaţie de echivalenţă *compatibilă cu* B.

§2. Compatibilitatea unui predicat trivalent şi a unei clasificări cu două nivele

Fie P un predicat trivalent, adică, în extensie, o pereche de mulţimi $\mathbf{a}_1 \supset \mathbf{a}_2$ şi fie o clasificare cu două nivele, adică o pereche de relaţii de echivalenţă $(\equiv_2) \Rightarrow (\equiv_1)$. Se poate întîmpla să nu existe nici o relaţie între mulţimile $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ şi clasele de echivalenţă în raport cu $\equiv_1$ şi $\equiv_2$ (fig. 37, a).

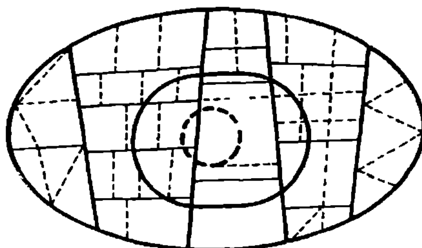


Fig. 37, a

Dar este posibil ca aceste mulțimi să fie legate prin următoarele două condiții:

dacă $a \equiv_2 b$ și $a \in \mathbf{a}_2$ atunci $b \in \mathbf{a}_2$

dacă $a \equiv_1 b$ și $a \in \mathbf{a}_1$ atunci $b \in \mathbf{a}_1$.

În acest caz

$\mathbf{a}_2$ este formată din cîteva dintre clasele de echivalență în raport cu $\equiv_2$;

$\mathbf{a}_1$ este formată din cîteva dintre clasele de echivalență în raport cu $\equiv_1$.

Situația este aceea din fig. 37, *b*.

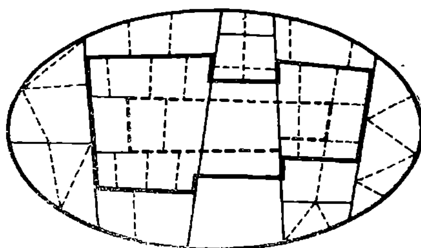


Fig. 37,b

În acest caz vom spune că clasificarea cu două nivele ($\equiv_2$, $\equiv_1$) este compatibilă cu mulțimea nuanțată $<\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1>$.

§ 3. Compatibilitatea unui predicat polivalent și a unei clasificări cu mai multe nivele

Să considerăm un predicat n-valent, sau λ-valent a cărui extensie este definită (vezi cap. I, §§ 3,4) de mulțimile ordinare $\mathbf{a}_\alpha$, unde $\alpha \in L_n$ respectiv $a \in K(L_\lambda)$ și o clasificare cu n, respectiv cu L_λ nivele, definite de un sistem de relații de echivalență (vezi cap. VI, § 6) ($\equiv_\alpha$) unde $\alpha \in L_n$ respectiv $\alpha \in K(L_\lambda)$.

Condiția de compatibilitate este

dacă $a \equiv_\alpha b$ și $a \in \mathbf{a}_\alpha$, atunci $b \in \mathbf{a}_\alpha$.

§ 4. Compatibilitatea unei relații binare cu o relație de echivalență

Fie R o relație binară între elementele lui I. Să presupunem că

$$R(a_1, a_2)$$
$$a_1 \equiv b_1 \qquad (*)$$
$$a_2 \equiv b_2.$$

În general, nu vom avea $R(b_1, b_2)$. Se spune că relația R este compatibilă cu relația de echivalență dacă din (*) rezultă

$$R(b_1, b_2). \qquad (**)$$

Exemplu. Fie $\equiv$ relația de egalitate prin deplasare și S relația de asemănare; $f \equiv f'$ înseamnă că figura f' poate fi obținută din figura f prin deplasare; $S(f,f')$ înseamnă că figura f' poate fi obținută din figura f prin asemănare.

Avem teorema de compatibilitate; dacă

$$f \equiv f'$$
$$g \equiv g'$$
$$S(f, g),$$

atunci $S(f', g')$.

Exemplu. A avea aceeași greutate este o relație de echivalență. Într-adevăr, relația între a și b exprimată prin propoziția

obiectul a este tot atît de greu ca și obiectul b (1)

este reflexivă:

obiectul a este tot atît de greu ca și el însuși,

este simetrică:

dacă obiectul a este tot atît de greu ca și obiectul b, atunci b este tot atît de greu ca și a

şi tranzitivă:

dacă obiectul a este tot atît de greu ca şi obiectul b şi b ca şi c atunci a este tot atît de greu ca şi b.

Scriem propoziţia (1) sub forma

$$a \equiv b. \tag{2}$$

Propoziţia

obiectul a este mai greu decît obiectul b (3)

exprimă o altă relaţie pe care o vom numi

$$R(a, b). \tag{4}$$

Dacă avem

$$a_1 \equiv a_2 \qquad b_1 \equiv b_2$$

$$R(a_1, b_1)$$

atunci

a_1 este tot atît de greu ca şi a_2;
a_1 este mai greu decît b_1;
b_1 este tot atît de greu ca şi b_2,

deci a_2 este mai greu decît b_2,

deci $R(a_2, b_2)$.

§ 5. Reprezentare grafică

Să considerăm în pătratul $I^2 = I \times I$ o relaţie de echivalenţă „$\equiv$" şi o relaţie oarecare R (fig. 38).

Dacă R este compatibilă cu $\equiv$, atunci dacă punctele $< a_1,a_2 >$ şi $< b_1,b_2 >$ sînt în acelaşi pătrat al caroiajului lui $\equiv$ (fig. 39), avem $a_1 \equiv b_1$, $a_2 \equiv b_2$, deci dacă $\rho \subset I \times I$ este mulţimea care reprezintă relaţia binară R şi dacă $< a_1,a_2 > \in \rho$, atunci $R(a_1,a_2)$, deci $R(b_1,b_2)$, deci

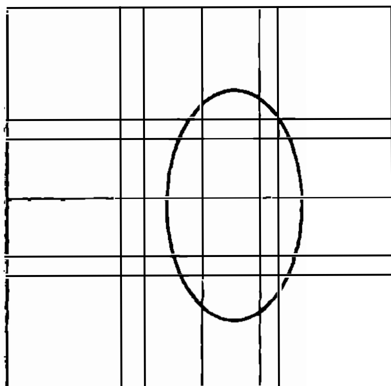


Fig. 38

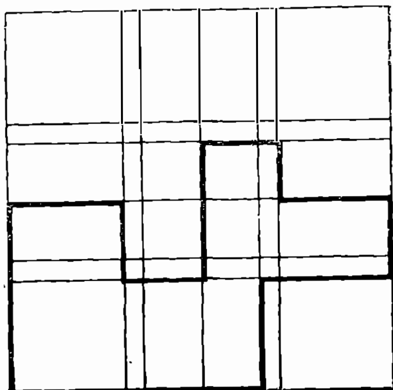


Fig. 39

$<b_1, b_2> \in \rho$, deci întreg pătratul este inclus în ρ, deci ρ este format de pătratele caroiajului lui $\equiv$ (fig. 40).

Fie, de exemplu, cazul fig. 40

$$I/\equiv = \{A_1, \ldots, A_6\}.$$

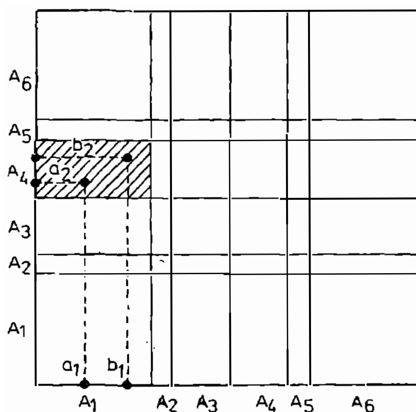
Următoarele două condiţii pentru A_i şi A_j:

I. Există un $a_i \in A_i$ şi un $a_j \in A_j$ astfel încît $R(a_i, a_j)$;

II. Pentru oricare $x_i \in A_i$ şi oricare $x_j \in A_j$ avem $R(x_i, x_j)$

sînt echivalente. Într-adevăr, I este o consecinţă a lui II. Vom arăta că II este de asemenea o consecinţă a lui I.

Fig. 40



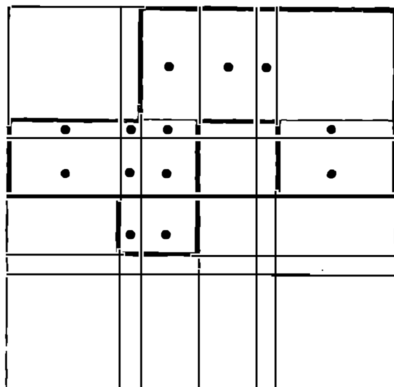


Fig. 41

Într-adevăr, dacă I este adevărată şi dacă $x_i \in A_i$, $x_j \in \in A_j$, atunci $x_i \equiv a_i$, $x_j \equiv a_j$, deci din $R(a_i, a_j)$ rezultă $R(x_i, x_j)$.

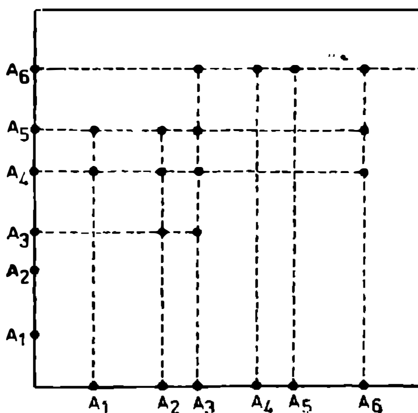
Între elementele $A_i \in I/\equiv$ vom introduce relaţia $\hat{R}(A_i, A_j)$ definită printr-una dintre condiţiile echivalente I, II.

Vom scrie

$$\hat{R} = R/\equiv$$

dar de multe ori vom scrie într-o manieră echivocă R în loc de $\hat{R}$ (fig. 41 şi 42). Figura 42 dă graficul lui $R/\equiv$.

Fig. 42



Teorema I. *Implicația a două relații de echivalență* $(\equiv_2) \Rightarrow (\equiv_1)$ *echivalează cu compatibilitatea lui* $\equiv_1$ *cu* $\equiv_2$.

Teorema II. *Dacă* $(\equiv_2) \Rightarrow (\equiv_1)$ *atunci* $(I/\equiv_1)/\equiv_2 = I/\equiv_2$.

Teorema III. *Dacă* $\equiv$ *este o relație de echivalență, proprietățile* P', P'' *definite prin*

$$P'(x) \text{ înseamnă } x \equiv c,$$

$$P''(x) \text{ înseamnă } c \equiv x,$$

unde c *este un individ dat, sînt compatibile cu* $\equiv$. Iată demonstrația. Condiția

$$\text{din } a \equiv b \text{ și } a \equiv c \text{ se deduce } b \equiv c$$

arată că

$$\text{din } a \equiv b \text{ și } P'(a) \text{ se deduce } P'(b).$$

De asemenea $c \equiv x$ este un predicat $P''(x)$ și condiția

$$\text{din } a \equiv b \text{ și } c \equiv a \text{ se deduce } c \equiv b$$

arată că

$$\text{din } a \equiv b \text{ și } P''(a) \text{ se deduce } P''(b).$$

Deci condiția de tranzitivitate a unei relații de echivalență echivalează cu condițiile de compatibilitate ale acestei relații cu cele două predicate P', P''

Condiția

$$\text{dacă } \begin{aligned} a &\equiv b \\ c &\equiv d \end{aligned}$$

atunci

$$\text{din } a \equiv c \text{ se deduce } b \equiv d$$

arată că

Teorema IV. *O relație de echivalență este compatibilă cu ea însăși.*

§6. Relațiile binare în logica trivalentă

Fie R_1, R_2 două relații binare cu

$$R_2 \Rightarrow R_1$$

și $\equiv_1$, $\equiv_2$ două relații de echivalență cu

$$(\equiv_2) \Rightarrow (\equiv_1).$$

Vom considera propozițiile trivalente

$$a \ R \ b$$

avînd valorile următoare:

$$V_{III}(R(a,b)) = 1 \text{ dacă } R_2(a,b);$$

$$V_{III}(R(a,b)) = \frac{1}{2} \text{ dacă } R_1(a,b) \text{ dar nu } R_2(a,b);$$

$$V_{III}(R(a,b)) = 0 \text{ dacă } R_1(a,b) \text{ este falsă.}$$

Condiția de compatibilitate este

dacă $R_2(a,b)$ și dacă $a' \equiv_2 a$, $b' \equiv_2 b$, atunci $R_2(a', b')$;

dacă $R_1(a,b)$ și dacă $a' \equiv_1 a$, $b' \equiv_1 b$, atunci $R_1(a', b')$,

deci

$$\min(V_{III}(a = a'), \ V_{III}(b = b'), \ V_{III}(R(a,b))) \leqslant \quad (*)$$
$$\leqslant V_{III}(R(a',b')).$$

Într-adevăr, dacă

$$V_{III}(a = a') = 1$$

$$V_{III}(b = b') = 1$$

$$V_{III}(R(a,b)) = 1,$$

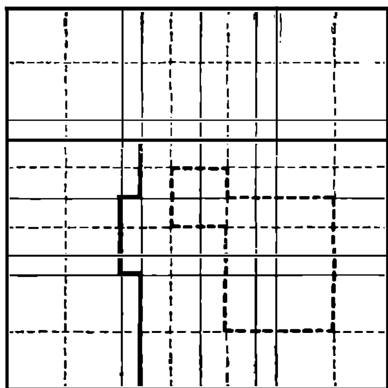


Fig. 43

atunci $a \equiv_2 a'$, $b \equiv_2 b'$, şi $R_2(a,b)$ este adevărată, deci $R_2(a,b)$ este adevărată, deci

$$V_{III}(R(a',\ b')) = 1.$$

Dacă

$$V_{III}(a = a') \geqslant \frac{1}{2},$$

$$V_{III}(b = b') \geqslant \frac{1}{2},$$

$$V_{III}(R(a,b)) \geqslant \frac{1}{2},$$

atunci $a \equiv_1 a'$, $b \equiv_1 b'$, $R_1(a,b)$, deci $R_1(a',\ b')$, deci

$$V_{III}(Ra',\ b') \geqslant \frac{1}{2}$$

În cele două cazuri, relaţia (*) este satisfăcută. Situaţia este aceea din fig. 43.

§7. Cazul general

O relaţie m-ară între elementele lui I în logica bivalentă este compatibilă cu echivalenţa „$\equiv$" dacă
din
$$R(a_1, \ldots, a_m)$$
$$a_1 \equiv b_1,$$
$$\ldots$$
$$a_m \equiv b_m,$$
deducem
$$R(b_1, \ldots, b_m).$$

În logica polivalentă, o relaţie m-ară este definită printr-o mulţime de relaţii m-are, compatibile cu clasificarea adecvată.

Capitolul X

IDENTITATEA NUANȚATĂ

§ 1. Identitatea în logica trivalentă

Să presupunem că propoziția

$$a = b$$

poate avea trei valori în L_3. Vom introduce două relații „$\equiv_1$" și „$\equiv_2$" în I definite prin

$$a \equiv_1 b \text{ înseamnă } V_{III}(a = b) \geqslant \frac{1}{2}$$

$$a \equiv_2 b \text{ înseamnă } V_{III}(a = b) = 1,$$

deci

$$(\equiv_2) \Rightarrow (\equiv_1).$$

Proprietatea de reflexivitate a identității

$$a = a$$

este

$$V_{III}(a = a) = 1, \qquad \text{(I)}$$

deci pentru orice a

$$a \equiv_2 a,$$

deci

$$a \equiv_1 a,$$

deci relațiile $\equiv_1$, $\equiv_2$ sînt reflexive.

Proprietatea de simetrie

$$a = b \text{ echivalent cu } b = a$$

dă

$$V_{III}(a = b) = V_{III}(b = a), \qquad \text{(II)}$$

deci

$$\text{dacă } a \equiv_1 b \text{ atunci } b \equiv_1 a,$$

$$\text{dacă } a \equiv_2 b \text{ atunci } b \equiv_2 a,$$

deci relaţiile $\equiv_1$, $\equiv_2$ sînt simetrice.

Pentru a justifica afirmaţia: $\equiv_1$, $\equiv_2$ sînt tranzitive, trebuie să ne gîndim că, în interpretarea modală, $\equiv_1$, $\equiv_2$ înseamnă respectiv

identitatea $a = b$ este posibilă
identitatea $a = b$ este necesară,

deci $a \equiv_1 b$ trebuie să fie citită

a poate fi egal cu *b*,

în timp ce $a \equiv_2 b$ trebuie să fie citită

a trebuie să fie egal cu *b*.

Nu ştim dacă raţionamentul

dacă *a* poate fi egal cu *b*
şi dacă *b* poate fi egal cu *c*
atunci *a* poate fi egal cu *c*

este exact; credem că raţionamentul

dacă *a* trebuie să fie egal cu *b*
şi dacă *b* trebuie să fie egal cu *c*
atunci *a* trebuie să fie egal cu *c*

este exact.

Vom presupune că relaţiile $\equiv_1$ şi $\equiv_2$ sînt tranzitive. Să observăm că:

I. Dacă $V_{III}(a = b) = V_{III}(b = c) = 1$, atunci $a \equiv_2 b$ şi $b \equiv_2 c$ deci $a \equiv_2 c$ deci $V_{III}(a = c) = 1$.

II. Dacă $V_{III}(a = b) = 1$, $V_{III}(b = c) = \frac{1}{2}$, atunci $a \equiv \equiv_2 b$, deci $a \equiv_1 b$ şi $b \equiv_1 c$, deci $a \equiv_1 c$, deci $V_{III}(a = = c) \geqslant \frac{1}{2}$.

III. Dacă $V_{III}(a = b) = \frac{1}{2}$, $V_{III}(b = c) = 1$, atunci $a \equiv_1 b$ şi $b \equiv_2 c$, deci $b \equiv_1 c$, deci $a \equiv_1 c$, deci $V_{III}(a = c) \geqslant \frac{1}{2}$

IV. Dacă $V_{III}(a = b) = V_{III}(b = c) = \frac{1}{2}$, atunci $a \equiv_1 b$ şi $b \equiv_1 c$, atunci $a \equiv_1 c$, deci $V_{III}(a = c) \geqslant \frac{1}{2}$.

În celelalte cazuri avem fie $V_{III}(a = b) = 0$, fie $V_{III}(b = c) = 0$.

În concluzie,

$$V_{III}(a = c) \geqslant \min(V_{III}(a = b),\ V_{III}(b = c)). \qquad (III)$$

Aceasta este relaţia care exprimă tranzitivitatea.

Să remarcăm că, A fiind o proprietate trivalentă

I. Dacă $V_{III}(a = b)$, $V_{III}(A(a)) = 1$, atunci $a \equiv_2 b$ şi $a \in \mathbf{a}_2$ deci, dacă proprietatea A este compatibilă cu echivalenţa $\equiv_2$, atunci $b \in \mathbf{a}_2$, deci $V_{III}(A(b)) = 1$.

II. Dacă $V_{III}(a = b) = 1$ şi $V_{III}(A(a)) = \frac{1}{2}$, atunci $a \equiv_2 b$, deci $a \equiv_1 b$ şi $a \in \mathbf{a}_1$, deci, dacă proprietatea A este compatibilă cu relaţia $\equiv_1$, atunci $b \in \mathbf{a}_1$, deci $V(A(b)) \geqslant \frac{1}{2}$.

III. Dacă $V_{III}(a = b) = \frac{1}{2}$ şi $V_{III}(A(a)) = 1$, atunci $a \equiv_1 b$ şi $a \in \mathbf{a}_2 \subset \mathbf{a}_1$, deci dacă A este compatibilă cu echivalenţa $\equiv_1$, avem $b \in \mathbf{a}_1$, deci $V(A(b)) \geqslant \frac{1}{2}$

IV. Dacă $V_{III}(a = b) = V_{III}(A(a)) = \frac{1}{2}$, atunci $a \equiv_1 b$ şi $a \in \mathbf{a}_1$, deci dacă A este compatibilă cu echivalenţa $\equiv_1$ avem $b \in \mathbf{a}_1$, deci $V(A(b)) \geqslant \frac{1}{2}$.

În celelalte cazuri avem fie $V_{III}(a = b) = 0$ fie $V_{III}(A(a)) = 0$. În toate aceste cazuri avem

$$V_{III}(a(b)) \geqslant \min(V_{III}(a = b),\ V_{III}(A(a))). \qquad (IV)$$

Relaţia (IV) exprimă indiscernabilitatea identităţilor.

§2. Identitatea în logicile polivalente

În logica n-valentă sau cu valențe în L_λ sau L_ρ proprietățile

$$V(a = a) = 1 \tag{I}$$

$$V(a = b) = V(b = a) \tag{II}$$

exprimă reflexivitatea și simetria. Prin raționamentul următor, pe care ar trebui să-l studiem din punct de vedere filosofic, ajungem la exprimarea tranzitivității prin

$$V(a = c) \geqslant \min(V(a = b),\ V(b = c)). \tag{III}$$

Iată raționamentul

I. Dacă $V(a = b) \geqslant \alpha$ și $V(b = c) \geqslant \beta$ atunci, dacă $\alpha \geqslant \beta$ avem $V(a = b) \geqslant \beta$, $V(b = c) \geqslant \beta$, deci $a \equiv_{\beta-} b$ și $b \equiv_{\beta-} c$ dar $\equiv_{\beta-}$ fiind relație de echivalență, deci tranzitivă, $a \equiv_{\beta-} c$, deci $V(a = c) \geqslant \beta$.

II. Dacă $V(a = b) \geqslant \alpha$ și $V(b = c) > \beta$, atunci, dacă $\alpha \geqslant \beta$, avem $V(a = b) \geqslant \beta$, $V(b = c) > \beta$, deci $V(b = c) \geqslant \beta$, deci $a \equiv_{\beta-} b$, $b \equiv_{\beta-} c$, deci $a \equiv_{\beta-} c$, deci $V(a = c) \geqslant \beta$.

III. Dacă $V(a = b) > \alpha$ și $V(b = c) \geqslant \beta$, atunci, dacă $\alpha \geqslant \beta$, avem $V(a = b) > \beta$, deci $V(a = b) \geqslant \beta$ și $V(b = c) \geqslant \beta$, deci $a \equiv_{\beta-} b$, $b \equiv_{\beta-} c$, deci $a \equiv_{\beta-} c$, deci $V(a = c) \geqslant \beta$.

IV. Dacă $V(a = b) > \alpha$ și $V(b = c) > \beta$, atunci, dacă $\alpha \geqslant \beta$, avem $V(a = b) > \beta$, $V(b = c) > \beta$, deci $a \equiv_{\beta+} b$, $b \equiv_{\beta+} c$, deci $a \equiv_{\beta+} c$, deci $V(a = c) > \beta$.

Rezultă că

$$\alpha + > \alpha - ,$$

dacă $\alpha > \beta$ atunci $\alpha - > \beta +$, deci
am obținut relația (III).

Printr-un raționament analog, vedem că, dacă predicatul A este compatibil cu clasificarea $\equiv_\alpha$ atunci

$$V(A(b) \geqslant \min\ (V(a = b),\ V(A(a))). \tag{IV}$$

§3. Identitățile chrisipiene

Să considerăm cazul trivalent.

După cum am arătat în cap. VIII, § 4, o relație R în logica trivalentă este reprezentată printr-o pereche $< R_2, R_1 >$ de relații $R_2 \Rightarrow R_1$ în logica bivalentă.

De exemplu, așa cum am arătat în § 2 al acestui capitol, identitatea „$\equiv$" este reprezentată prin perechea $< \equiv_2, \equiv_1 >$.

Fiecărei relații $R = < R_2, R_1 >$ în logica trivalentă, îi vom asocia aceste două relații în logica trivalentă

$$\mu_1 R = < R_1, R_1 >$$

$$\mu_2 R = < R_2, R_2 >$$

Este evident că $\mu_1 R = < R_1, R_1 > \neq R_1$ și $\mu_2 R = < R_2, R_2 > \neq R_2$.

Relațiile

$=_1$ definită prin perechea $< \equiv_1, \equiv_1 >$

$=_2$ definită prin perechea $< \equiv_2, \equiv_2 >$,

vor fi numite relații chrisipiene de identitate. Valorile logice ale celor trei propoziții

$$a = b;$$

$$a =_1 b;$$

$$a =_2 b$$

sînt date de

$a = b$	0	$\frac{1}{2}$	1
$a =_1 b$	0	1	1
$a =_2 b$	0	0	1

Această observație poate fi ușor extinsă la cazul polivalent.

Capitolul XI

LOGICA PROPOZIȚIILOR

---

§1. **Propozițiile de tip II**

Să considerăm propozițiile:

Socrate este un om;

eu mănînc un măr;

$2 < 3$;

Bologna este între Roma și Padova;

$a \in \alpha$

și să comparăm aceste propoziții cu următoarele:

1. propoziția p aparține mulțimii propozițiilor adevărate, ceea ce vom scrie $p \in V$;
2. valoarea logică a propoziției p este adevărul, ceea ce vom scrie $V(p) = 1$;
3. afirm propoziția p, ceea ce vom scrie $\vdash p$ sau *afirm* p;
4. neg propoziția p, ceea ce vom scrie *neg* p;
5. propoziția q este consecința propozițiilor $p_1, \ldots, p_n$;
6. propoziția q este adevărată în virtutea ipotezelor $p_1, \ldots, p_n$;
7. propoziția q este adevărată fără a face să implice nici o ipoteză;
8. propozițiile $p_1, \ldots, p_n$ formează o condiție suficientă pentru q;
9. propoziția q este o condiție necesară pentru p;
10. propoziția p este o condiție necesară și suficientă pentru q;
11. propozițiile $p_1, \ldots, p_n$ nu pot să fie toate adevărate;

12. propoziţiile $q_1, \ldots, q_m$ nu pot să fie toate false;
13. dacă propoziţiile $p_1, \ldots, p_n$ sînt toate adevărate, propoziţiile $q_1, \ldots, q_m$ nu sînt toate false.

Într-adevăr, propoziţiile din prima serie sînt propoziţii de predicaţie avînd subiectul Socrate şi predicatul om sau de relaţie între

2 şi 3 (relaţia $<$)

a şi α (relaţia $\in$).

Dimpotrivă, propoziţiile 1—13 sînt propoziţii de predicaţie avînd ca subiect o propoziţie sau o relaţie între propoziţii.

Propoziţiile 5, 6 şi 8 au aceeaşi semnificaţie; le vom scrie

$$(p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q). \tag{I}$$

Propoziţia 9 este un caz particular

$$(p) \Rightarrow (q). \tag{II}$$

Propoziţiile 3 şi 7 au aceeaşi semnificaţie; le vom scrie

$$\vdash q$$

sau

$$\Rightarrow (q). \tag{III}$$

Propoziţia 10 va fi scrisă

$$(p) \Leftrightarrow (q), \tag{IV}$$

iar propoziţia 11 va fi scrisă (motivele acestei scrieri sînt explicate în § 2).

$$(p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow. \tag{V}$$

Propoziţia 4 este un caz particular al acesteia; ea va fi scrisă

$$(p) \Rightarrow. \tag{VI}$$

Propoziţia 12 va fi scrisă

$$\Rightarrow (q_1, \ldots, q_m) \tag{VII}$$

şi propoziţia 13 va fi scrisă

$$(p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q_1, \ldots, q_m). \tag{VIII}$$

Propozițiile (I), (II), (IV), (V), (VII), (VIII) exprimă relații între propozițiile pe care le conțin; propozițiile (III), (IV) sînt predicate monare.

Relația „⇒" care apare în propozițiile (I) — (III), (IV), (VI) va fi numită relația de *consecință* — eventual cu consecventul vid (VI) sau cu antecedentul vid (III) —, în timp ce relația ⇒ care apare în (VIII) va fi numită relație de *secvență* și (IV) relație de *echivalență*.

Propozițiile de tip 1—13, fiind propoziții relative la propozițiile $p, q, p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_m$, vor fi numite propoziții de tip II și vom numi $p, q, p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_m$ propoziții de tip I.

§2. Propozițiile de tip III

Să considerăm relația de echivalență „⇔". Propoziția

$$(p) \Leftrightarrow (p) \qquad \text{Aeqr}$$

este totdeauna adevărată. Aceasta este proprietatea de reflexivitate a relației „⇔", pe care o vom desemna prin Refl (⇔).

Dacă $(p) \Leftrightarrow (q)$ atunci $(q) \Leftrightarrow (p)$; Aeqs.

Dacă $(p) \Leftrightarrow (q)$ și $(q) \Leftrightarrow (r)$ atunci $(p) \Leftrightarrow (r)$ Aeqt.

Aceste două propoziții sînt propoziții care se referă la propoziții de tip II, de forma:

propoziția $(q) \Leftrightarrow (p)$ este consecința

propoziției $(p) \Leftrightarrow (q)$;

propoziția $(p) \Leftrightarrow (r)$ este consecința

propozițiilor $(p) \Leftrightarrow (q)$, $(q) \Leftrightarrow (r)$.

Acestea sînt deci propoziții de consecință, care se referă la propoziții de tip II. Este convenabil să fie scrise

$$((p) \Rightarrow (q)) \equiv\rangle ((q) \Rightarrow (p)),$$

$$((p) \Rightarrow (q), (q) \Rightarrow (r)) \equiv\rangle ((p) \Rightarrow (r))$$

și să se spună că sînt propoziții de tip III.

Dar Aeqs arată că propoziția următoare este adevărată:
Condiția necesară și suficientă
a propoziției $(p) \Leftrightarrow (q)$ este $(q) \Leftrightarrow (p)$.

Aceasta este o propoziție de echivalență de tip III, căci se referă la două propoziții de tipul al doilea. O vom scrie

$$((p) \Leftrightarrow (q)) \langle\equiv\rangle ((q) \Leftrightarrow (p)).$$

Să considerăm de asemenea propozițiile

$$(p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q),$$
$$(p_1 \& \ldots \& p_n) \Rightarrow (q).$$

Ele exprimă amîndouă faptul că q este consecința propozițiilor $p_1, \ldots, p_n$ luate împreună, deci ele au același sens, deci

$$((p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q)) \langle\equiv\rangle ((p_1 \& \ldots \& p_n) \Rightarrow (q)).$$

Să considerăm propozițiile

$$(p) \Rightarrow (q_1, \ldots, q_m),$$
$$(p) \Rightarrow (q_1 \vee \ldots \vee q_m).$$

Ele exprimă amîndouă faptul că, dacă p este adevărată, cel puțin una dintre propozițiile $q_1, \ldots q_m$ este adevărată, deci ele au același sens

$$((p) \Rightarrow (q_1, \ldots, q_m)) \langle\equiv\rangle ((p) \Rightarrow (q_1 \vee \ldots \vee q_m)).$$

De aici putem deduce echivalența

$$((p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q_1, \ldots, q_m)) \langle\equiv\rangle ((p_1 \& \ldots \& p_n) \Rightarrow (q_1 \vee \ldots \vee q_m)).$$

Iată alte propoziții de tip III pe care trebuie să le menționăm. Dacă $(p_0, p_1, \ldots, p_r) \Rightarrow (q)$, atunci nu se afirmă că toate ipotezele $p_0, p_1, \ldots, p_n$ au fost efectiv întrebuințate pentru a deduce concluzia q. Să presupunem că nu au fost întrebuințate decît $p_1, \ldots, p_n$. Deci să presupunem că $(p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q)$ este adevărată. Propoziția $(p_0, p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q)$ va fi de asemenea adevărată. Se poate spune că $(p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q)$ are drept consecință $(p_0, p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow \Rightarrow (q)$, ceea ce vom scrie

$$((p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q)) \equiv\rangle ((p_0, p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q)). \text{ (Renf}_{\text{III}})$$

Acest raţionament este de asemenea valabil dacă se consideră propoziţia $\Rightarrow (q)$, q este valabilă nemaifăcînd nici o ipoteză, deci ea este valabilă dacă se face ipoteza p, căci stabilind valabilitatea lui $(p) \Rightarrow (q)$ nu afirmăm că am întrebuinţat p în demonstraţia lui q, deci

$$(\Rightarrow (q)) \equiv\!> ((p) \Rightarrow (q)). \qquad (\mathrm{Renf}_{III}\ a\ o)$$

Un raţionament asemănător arată că

$$((p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q_1, \ldots, q_m)) \equiv\!> ((p_0, p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q_1, \ldots, q_m)). \qquad (\mathrm{Renf}_{III}\ a)$$

Dacă $(p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q_1, \ldots, q_m)$, atunci putem de asemenea afirma că din $p_1, \ldots, p_n$ tragem concluzia că $q_1, \ldots, q_m$ nu sînt toate false, deci că $q_0, q_1, \ldots, q_m$ nu sînt toate false, deci

$$((p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q_1, \ldots, q_m)) \equiv\!> ((p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q_0, q_1, \ldots, q_m)). \qquad (\mathrm{Renf}_{III}\ c)$$

Propoziţia $(p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow$ înseamnă că $p_1, \ldots, p_n$ nu pot fi toate adevărate, deci afirmarea lor simultană este contradictorie, deci se poate trage de aici orice concluzie

$$((p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow) \equiv\!> ((p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q)). \qquad (\mathrm{Renf}_{III}\ c\ o)$$

$\mathrm{Renf}_{III}\ a\ o$ şi $\mathrm{Renf}_{III}\ c\ o$ exprimă *principiul de implicaţie a adevăratului prin fals*

o concluzie adevărată poate fi trasă din orice premisă, chiar şi dintr-o premisă falsă;

o premisă falsă poate implica orice concluzie, chiar şi o concluzie adevărată.

§3. Conectorii negaţie, implicaţie, echivalenţă, excluziune, contradicţie

Să considerăm propoziţiile:

1. eu neg p;
2. p are drept consecinţă q;
3. condiţia necesară şi suficientă a lui p este q;
4. p exclude q;
5. p este contradictorie cu q.

Am interpretat propoziţiile 1—3 ca propoziţii de tip II

1. $(p) \Rightarrow$;
2. $(p) \Rightarrow (q)$;
3. $(p) \Leftrightarrow (q)$,

dar este uşor de văzut că 4 și 5 pot fi de asemenea considerate ca propoziţii de tip II.

Să considerăm propoziţia 1 se poate forma o propoziţie Np astfel încît propoziţia 1 să fie echivalentă cu

1′ afirm Np.

Iată cîteva exemple:

p	Np
Socrate este filosof. Mănînc un măr.	Socrate nu este filosof. Nu mănînc un măr.
$2 < 3$	$2 \geqslant 3$
Bologna este între Roma şi Padova	Bologna nu este între Roma şi Padova.
$a \in \alpha$.	$a \notin \alpha$.
$a = b$.	$a \neq b$.
Socrate este muritor. Lampa este aprinsă. Toţi oamenii sînt muritori. Există lebede negre.	Socrate este nemuritor. Lampa este stinsă. Există oameni nemuritori. Nu există lebede negre.

N este un conector monar, adică o funcţie care face să corespundă o propoziţie Np fiecărei propoziţii p, astfel ncît negaţia lui p să fie afirmaţia lui Np

$$((p) \Rightarrow) \langle\equiv\rangle (\Rightarrow (Np)).$$

Np este o propoziţie de tip I, ca şi p. Această echivalenţă introduce *conectorul* N sau *negaţia*.

Insă, o cale analoagă ne conduce să asociem propoziţiei de tipul al doilea $(p) \Rightarrow (q)$ o propoziţie de tipul întîi $p \rightarrow q$, astfel încît

$$((p) \Rightarrow (q)) \langle\equiv\rangle (\Rightarrow (p \rightarrow q)).$$

Putem de asemenea asocia lui $(p_1, \ldots, p_n, q) \Rightarrow (r)$ propoziția avînd același sens $(p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q \rightarrow r)$ căci propozițiile:

din ipotezele $p_1, \ldots, p_n, q$ se trage concluzia r;

din ipotezele $p_1, \ldots, p_n$ se deduce că din ipoteza q se deduce r

au același sens, deci

$$((p_1, \ldots, p_n, q) \Rightarrow (r)) \langle\equiv\rangle ((p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q \rightarrow r)).$$

Această echivalență care exprimă relația dintre *conectorul* $\rightarrow$ *(conectorul implicație)* și relația $\Rightarrow$ *(relația implicație)* poate fi descompusă în două relații de consecință:

$$((p_1, \ldots, p_n, q) \Rightarrow (r)) \equiv\rangle ((p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q \rightarrow r)), \qquad \text{(I)}$$

$$((p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q \rightarrow r)) \equiv\rangle ((p_1, \ldots, p_n, q) \Rightarrow (r)). \qquad \text{(II)}$$

Începem prin a explica validitatea lui (II). Să ne plasăm în domeniul ipotezelor $p_1, \ldots, p_n$; dacă în acest domeniu avem $q \rightarrow r$ și dacă în acest domeniu facem supoziția q, atunci în acest nou domeniu vom avea r. Aceasta se poate scrie, în domeniul ipotezelor $p_1, \ldots, p_n$

$$\begin{array}{c} q \rightarrow r, \\ \underline{q} \\ r \end{array}$$

Acesta este raționamentul prin *modus ponens.*

Validitatea lui (I) se explică în felul următor: în domeniul ipotezelor $p_1, \ldots, p_n$,
dacă făcînd ipoteza q tragem concluzia r,
atunci, nefăcînd această ipoteză, din q tragem concluzia p.

Există mai multe posibilități de exprimare a acestor idei în limbile naturale; propozițiile $p \rightarrow q$ și $(p) \Rightarrow (q)$ sînt amîndouă exprimate prin:

dacă p atunci q;
p atrage după sine q;
p implică q;
p are drept consecință q;
condiția necesară a lui p este q;
condiția suficientă a lui q este p.

Credem că între aceste desene de propoziții există o echivalență de sens, $\equiv_s$. Totuși acest sens nu este unic, căci toate pot să traducă nu numai

$$\rightarrow, \quad \Rightarrow, \quad \equiv\rangle,$$

ci și o infinitate de implicații

$$\xrightarrow[\text{IV}]{}, \xrightarrow[\text{V}]{}, \ldots, \xrightarrow[N]{}, \ldots$$

definite după cum urmează. Dacă $p_1^N, \ldots, p_n^N, q^N$ sînt propoziții de tip N, propoziția de tip $N + 1$

$$(p_1^N, \ldots, p_n^N) \xrightarrow[N+1]{} (q^N)$$

înseamnă

$$q^N \text{ este o consecință a lui } p_1^N, \ldots, p_n^N.$$

Astfel am definit o infinitate de tipuri de propoziții și o infinitate de tipuri de implicații. Propozițiile (I) sînt ambigue în ceea ce privește tipul; ele traduc toate propozițiile

$$p \rightarrow q$$

și (II) cu $0 < N < \infty$,

$$(p^N) \xrightarrow[N+1]{} (q^N). \qquad \text{(II)}$$

Această ambiguitate este de asemenea valabilă pentru propoziția (3) care traduce propozițiile de echivalență de primul tip

$$p \leftrightarrow q$$

și cele de un tip oarecare

$$(p^N) \xleftrightarrow[N+1]{} (q^N). \qquad \text{(III)}$$

Vom spune că $\leftrightarrow$ este *conectorul echivalență* și $\Leftrightarrow$, $\langle\equiv\rangle$, . $\xleftrightarrow[N]{}$ sînt *relațiile de echivalență*.

Să remarcăm că propozițiile 4 și 5 au, de asemenea, o ambiguitate: putem să le considerăm drept propoziții de tip II, dar totodată și drept propoziții de tip I, pe care le vom scrie, respectiv, $p \perp q$ și $p \leftarrow\!/\!\rightarrow q$.

În rezumat, conectorii „N", „$\rightarrow$" „$\leftrightarrow$", „$\perp$" şi „$\leftrightarrow$" generează relaţii între propoziţiile de primul tip.

„$(p) \Rightarrow$" înseamnă „Np este afirmată"

„$(p) \Rightarrow (q)$" înseamnă „$\leftrightarrow q$ este afirmată"

„p exclude q" înseamnă „$p \perp q$ este afirmată"

„p este contradictorie cu q" înseamnă „$p \leftarrow\!\!|\!\!\rightarrow q$ este afirmată"

O nouă relaţie poate fi examinată
„$p \vee q$ este afirmată" care înseamnă
„posibilităţile p, q sînt exhaustive".
Conectorii
conjuncţia: „p & q";
funcţia lui Sheffer: „$p \top q$" care înseamnă „nici p, nici q";
excepţia „$p - q$" care înseamnă „p dar nu q", nu generează relaţii interesante.

Capitolul XII

IDEEA DE VALOARE LOGICĂ

---

§1. **Conjuncția și disjuncția**

Să considerăm logica cu un număr oarecare de valori; dacă relația de echivalență $(p) \Leftrightarrow (q)$ este valabilă între două propoziții p, q, atunci ele sînt în același timp adevărate sau false, deci

(I) dacă $(p) \Leftrightarrow (q)$ atunci $V(p) = V(q)$.

Dacă relația $(p) \Rightarrow (q)$ este valabilă, aceasta înseamnă că, dacă presupunem p, atunci trebuie să avem q, deci că valoarea logică a lui q este cel puțin egală cu aceea a lui p, deci

(II) dacă $(p) \Rightarrow (q)$ atunci $V(p) \leqslant V(q)$.

Să analizăm conectorul conjuncție. Propoziția

$$p \mathbin{\&} q,$$

de exemplu

plouă și fumez,

nu este adevărată decît dacă plouă și dacă fumez, deci dacă fiecare dintre propozițiile

plouă
fumez

este adevărată. Se poate deci spune

(III) Valoarea logică $V_{II}(p \mathbin{\&} q)$ nu depinde decît de valorile logice $V_{II}(p)$ și $V_{II}(q)$ și ea este dată prin funcția $\cap$

$$V_{II}(p \mathbin{\&} q) = V_{II}(p) \cap V_{II}(q)$$

definită prin

$\cap$	0	1
0	0	0
1	0	1

O analiză asemănătoare este valabilă pentru conectorul disjuncție, deci

(IV) Valoarea logică $V_{II}(p \vee q)$ nu depinde decît de valorile logice $V_{II}(p)$ şi $V_{II}(q)$ şi ea este dată de funcţia

$$V_{II}(p \vee q) = V_{II}(p) \cup V_{II}(q)$$

definită prin

$\cup$	0	1
0	0	1
1	1	1

Matricile* lui „$\cap$" şi lui „$\cup$" arată că pentru $x \in L_2$ $y \in L_2$ avem

$$x \cap y = \min (x, y)$$
$$x \cup y = \max (x, y), \qquad (*)$$

unde min (x, y) este cel mai mic dintre numerele x, y şi max (x, y) este cel mai mare.

Or, propoziţiile $p \& q$, $p \vee q$ au un sens independent de numărul valorilor logice şi propoziţia următoare rămîne valabilă.

Valorile logice $V(p \& q)$, $V(p \vee q)$ ale propoziţiilor $p \& q$, $p \vee q$ nu depind decît de valorile logice $V(p)$, $V(q)$:

$$V(p \& q) = V(p) \cap V(q);$$

$$V(p \vee q) = V(p) \cup V(q).$$

V este valoarea logică într-una din logicile menţionate în cap. I, §§ 2, 3, 4; este vorba de definirea funcţiilor „$\cap$" şi „$\cup$" în L_3, L_n, L_ρ, L_λ.

Iată cum se procedează în L_3, dacă se adoptă interpretarea modală din cap. II, § 2. Pentru că 0 este falsul şi 1 este adevăratul, aceste idei se comportă ca în L_2, deci

$$0 \cup 0 = 0 \cup 1 = 1 \cup 0 = 0,$$
$$1 \cup 1 = 1, \qquad (1)$$
$$0 \cup 0 = 0,$$
$$0 \cup 1 = 1 \cup 0 = 1 \cup 1 = 1.$$

* adică tablourile de mai sus.

Dacă p este adevărată, $p \vee q$ şi $q \vee p$ sînt adevărate; dacă p este falsă, $p \,\&\, q$ şi $q \,\&\, p$ sînt false, deci, în particular,

$$0 \cap \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cap 0 = 0, \qquad (2)$$
$$1 \cup \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cup 1 = 1.$$

Propoziţiile $p \,\&\, p$, $p \vee p$ au aceeaşi valoare logică ca şi p, deci, în particular,

$$\frac{1}{2} \cap \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \qquad (3)$$
$$\frac{1}{2} \cup \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dacă p este adevărată, $p \,\&\, q$ are aceeaşi valoare ca şi q şi dacă p este falsă $p \vee q$ are aceeaşi valoare ca şi q, în particular,

$$1 \cap \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cap 1 = \frac{1}{2}, \qquad (4)$$
$$0 \cup \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cup 0 = \frac{1}{2}$$

Aceasta ne dă cele două tablouri

$\cap$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

$\cup$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

deci proprietăţile (*) rămîn adevărate.

Un procedeu analog ne dă aceste matrici în cazul lui L_4 dacă adoptăm interpretarea modală din cap. II, §1. Dacă p, q sînt adevărate, deci dacă $V_{IV}(p) \geqslant \frac{2}{3}$, $V_{IV}(q) \geqslant \frac{2}{3}$, atunci $V_{IV}(p \;\&\; q) \geqslant \frac{2}{3}$ dacă p este adevărată, deci dacă $V_{IV}(p) \geqslant \frac{2}{3}$, atunci $p \vee q$ și $q \vee p$ sînt adevărate, deci $V_{IV}(p \vee q) \geqslant \frac{2}{3}$, $V_{IV}(q \vee p) \geqslant \frac{2}{3}$ Dacă p, q sînt false, deci dacă $V_{IV}(p) \leqslant \frac{1}{3}$, $V_{IV}(q) \leqslant \frac{1}{3}$, atunci $V_{IV}(p \vee q) \leqslant \frac{1}{3}$ dacă p este falsă, deci dacă $V_{IV}(p) \leqslant \frac{1}{3}$ atunci $p \;\&\; q$, $q \;\&\; p$ sînt false, deci $V_{IV}(p \;\&\; q) \leqslant \frac{1}{3}$ $V_{IV}\,(q \;\&\; p) \leqslant \frac{1}{3}$ Dacă p este necesar falsă, deci dacă $V_{IV}(p) = 0$, $p \;\&\; q$, $q \;\&\; p$ sînt necesar false, deci $V_{IV}(p \;\&\; q) = V_{IV}(q \;\&\; p) = 0$, deci $0 \cap 0 = 0 \cap x = x \cap 0 = 0$. Pentru ca $p \;\&\; q$ să fie necesar adevărată, trebuie ca p și q să fie necesar adevărate, deci $V_{IV}\,(p \;\&\; q) = 1$ echivalează cu $V_{IV}(p) = V_{IV}(q) = 1$, deci $1 \cap 1 = 1$, dar $1 \cap \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cap 1 = \frac{2}{3}$ Dacă p este necesar adevărată, $p \;\&\; q$ și $q \;\&\; p$ au aceeași valoare ca și q, deci $1 \cap x = x \cap 1 = x$, $p \;\&\; q$ are aceeași valoare ca și p, deci $x \cap x = x$. Pentru a arăta că $\frac{1}{3} \cap \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cap \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ este suficient să remarcăm că dacă p este eventual falsă și dacă q este eventual adevărată, $p \;\&\; q$ și $q \;\&\; p$ sînt eventual false. Am construit de asemenea funcția „$\cap$" în L_4; pentru „$\cup$" procedăm într-un mod analog; obținem

$\cap$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0	0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

$\cup$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
1	1	1	1	1

Formulele (*) rămîn valabile în L_4. Combinînd matricile lui „$\cap$" şi lui „$\cup$" în L_3 şi în L_4, se obţin aceste matrici în L_5, care satisfac (*) dacă

$$\frac{1}{4} \cap \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cap \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{3}{4} \cap \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cap \frac{3}{4} = \frac{1}{2},$$

ceea ce se justifică remarcînd că dacă $V_V(p) = \frac{1}{4}$ şi $V_V(q) = \frac{1}{2}$, atunci p este falsă nu necesar, q este îndoielnică, deci $p \& q$, $q \& p$ sînt false nu necesar; dacă $V_V(p) = \frac{3}{4}$, $V_V(q) = \frac{1}{2}$, atunci p este adevărată nu necesar, q este îndoielnică, deci $p \& q$ şi $q \& p$ sînt îndoielnice.

Egalităţile (*) pot fi citite:

propoziţia $p \& q$ are valoarea logică cea mai puţin adevărată, iar $p \vee q$ cea mai mult adevărată, dintre valorile logice ale lui p şi ale lui q.

Pare natural să extindem această condiţie la cazul L_ρ şi L_λ-valent.

Valorile obţinute pentru $V(p \& q)$ nu ţin seama de posibilitatea ca p şi q să fie adevărate amîndouă, fără ca totuşi ele să fie compatibile. Se stabileşte deci *principiul compatibilităţii oricărei perechi de propoziţii adevărate.* Acest fapt

nu este grav în logica bivalentă, căci în logica bivalentă propoziţia

p şi q sînt compatibile

nu poate însemna decît că

p şi q sînt simultan adevărate.

Nu se întîmplă acelaşi lucru în logicile modale şi în logicile cu mai multe valori. Totuşi, o definiţie care dă „$V(p \,\&\, q)$ = adevăratul" înseamnă că „$V(p)$ = adevăratul",

„$V(q)$ = adevărat" şi „$V(p$ compatibil cu $q)$ = adevărat" nu a fost încă studiată.

§2. Conectorii. implicaţie

Pentru propoziţia $p \rightarrow q$ în logica bivalentă, observaţia (II) din §1 arată că dacă $V_{II}(p \rightarrow q) = 1$, atunci $V_{II}(p) \leqslant V_{II}(q)$, deci dacă $V_{II}(p) > V_{II}(q)$, atunci $V_{II}(p \rightarrow q) = 0$, deci dacă $V_{II}(p) = 1$, $V_{II}(q) = 0$, atunci $V_{II}(p \rightarrow q) = 0$. Pentru a determina valoarea lui $V_{II}(p \rightarrow q)$ în celelalte trei cazuri, trebuie întrebuinţat principiul implicaţiei adevăratului prin fals (vezi cap. X, §3) care ne asigură că $p \rightarrow q$ este adevărată dacă p este falsă şi dacă q este adevărată, deci putem enunţa proprietatea

(V) Valoarea logică $V_{II}(p \rightarrow q)$ nu depinde decît de valorile logice $V_{II}(p)$ şi de $V_{II}(q)$ şi ea este dată de funcţia $\rightarrow$:

$$V_{II}(p \rightarrow q) = V_{II}(p) \rightarrow V_{II}(q)$$

definită de

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

Presupunem că valoarea logică $V(p \rightarrow q)$ în logicile cu 3, n, L_{ρ}, sau L_{λ} valori nu depinde decît de valorile logice $V(p)$ şi $V(q)$

$$V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q)$$

şi este vorba de definirea funcţiei „$\rightarrow$" Pentru $V(p)$, $V(q)$ egale cu 0 sau cu 1, $V(p \rightarrow q)$ este valoarea definită

în L_2. Principiul implicației adevăratului prin fals arată că

$$x \rightarrow 1 = 1,$$

$$0 \rightarrow x = 1.$$

Deoarece $(p) \Rightarrow (q)$ sau $q \Rightarrow (p \rightarrow p)$, deci $V(p \rightarrow p) = 1$, deci

$$x \rightarrow x = 1.$$

Totuși aceste condiții nu determină funcția $\rightarrow$. În L_3 avem nouă funcții

$\rightarrow$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	α	1	1
1	0	β	1

Dacă am avea $\alpha = 1$ sau $\beta = 1$, deoarece $V(p \rightarrow q) = 1$ este echivalent cu $\Rightarrow (p \rightarrow q)$, deci cu $(p) \Rightarrow (q)$, deci implică (vezi condiția II de la §1) $V(p) \leqslant V(q)$, ar trebui să avem $\frac{1}{2} \leqslant 0$, respectiv $1 \leqslant \frac{1}{2}$ deci α și β nu pot fi decît 0 sau $\frac{1}{2}$ Există deci patru matrici posibile. Există deci patru conectori în L_3 care pot să joace rolul de implicație, deci *propoziția „p implică q" este polisemantică în logica trivalentă*. Printre aceste implicații vom menționa: *implicația lukasiewicziană* $\underset{L}{\rightarrow}$ și *implicația reziduală* $\rightarrow$

$\underset{L}{\rightarrow}$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

$\rightarrow$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

Ele pot fi definite prin

$$x \underset{L}{\rightarrow} y = \min(1, 1 - x + y),$$

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \leqslant y \\ y \text{ dacă } x > y. \end{cases}$$

Se vede cu uşurinţă că aceste definiţii pot fi întrebuinţate de asemenea în L_n, L_ρ, L_λ. Ele au făcut obiectul a numeroase studii.

Remarcăm că relaţia de consecinţă

$$(p_1, \qquad p_r) \Rightarrow (q) \tag{1}$$

echivalează cu următoarele două afirmaţii: propoziţiile

$$(p_1 \,\&\, p_2 \,\&\, \qquad \&\, p_r) \rightarrow (q), \tag{2}$$

$$(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow \qquad \rightarrow (p_r \rightarrow q) \ldots) \tag{3}$$

sînt adevărate.

Deoarece în (1) premisele $p_1, \ldots, p_r$ pot fi permutate, acelaşi lucru se petrece şi în (3). În particular,

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \Rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)). \tag{4}$$

Să remarcăm, de asemenea, că în (1) dacă una dintre propoziţiile $p_1, \qquad p_n$ este adevărată, o putem suprima în antecedent

dacă p_i este adevărată
şi dacă

$$(p_1, \qquad p_n) \Rightarrow (q)$$

atunci

$$(p_1, \qquad p_{i-1}, p_{i+1}, \qquad p_n) \Rightarrow (q).$$

Aceasta este o extensie a lui *modus ponens*
dacă p este adevărată
şi dacă

$$(p) \Rightarrow (q)$$

atunci q este adevărată.

În afară de cele două implicaţii „$\underset{L}{\rightarrow}$" şi „$\rightarrow$" definite în logicile cu mai multe valori, trebuie să remarcăm că în

logica modală a lui Lewis se întrebuinţează un alt tip de implicaţie, *implicaţia strictă* (*strict implication*). W. Ackerman a introdus un tip de implicaţie care diferă de precedentele şi pe care el o numeşte implicaţie *riguroasă* (*strenge implikation*).

Alonzo Church a introdus o *implicaţie slabă (weak implication)* şi Hans Reichenbach o *implicaţie probabilistă* (*Wahrscheinlichkeitsimplikation*).

§3. Conectorii negaţie

Există mai multe posibilităţi de a nega o propoziţie; se poate spune:

este fals că p;

este necesar ca p să fie falsă;

este absurd ca p să fie adevărată

(sau p este absurdă);

este imposibil ca p să fie adevărată;

nu este necesar ca p să fie adevărată.

Vom considera mai multe tipuri de negaţie.

Negaţia simetrică N este caracterizată de principiul dublei negaţii

$$(NNp) \Leftrightarrow (p)$$

şi de *principiul contrapoziţiei* (*modus tollendo tollens*)

$$(p \Rightarrow q) \equiv\rangle ((Nq) \Rightarrow Np)).$$

O consecinţă a acestor legi sînt formulele lui A. de Morgan

$$N(p \,\&\, q) \Leftrightarrow (Np \vee Nq),$$
$$N(p \vee q) \Leftrightarrow (Np \,\&\, Nq).$$

Se poate enunţa principiul valabil în L_2, L_n, L_ρ, L_λ.

Valoarea logică a negaţiei Np a lui p nu depinde decît de valoarea logică a lui p,

$$V(Np) = NV(p),$$

funcţia N în L_2, L_n, L_ρ, L_λ fiind

$$Nx = 1 - x.$$

Negaţiile modale extreme: imposibilitate (η) şi non-necesitate (γ), care satisfac condiţiile

$$(p \,\&\, p) \Rightarrow,$$

$$((p \,\&\, q) \Rightarrow) \equiv\rangle ((q) \Rightarrow (\eta p)),$$

respectiv

$$\Rightarrow (p \vee \gamma p)$$

$$(\Rightarrow (p \vee q)) \equiv\rangle ((\gamma p) \Rightarrow (q)).$$

Avem

$$\eta x = 1 \begin{cases} 1 \text{ dacă } x = 0. \\ 0 \text{ dacă } x > 0. \end{cases}$$

$$\gamma x = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x < 1 \\ 0 \text{ dacă } x = 1. \end{cases}$$

Vedem că

$$(\eta p) \Rightarrow (Np)$$

$$(Np) \Rightarrow (\gamma p).$$

Negaţiile modale nuanţate $\bar{\varphi}_\alpha$, $\bar{\psi}_\alpha$ sînt definite pentru $0 < \alpha \leqslant 1$ prin

$$\bar{\varphi}_\alpha x = \begin{cases} 1 \text{ dacă } 0 \leqslant x < \alpha \\ 0 \text{ dacă } \alpha \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

şi, pentru $0 \leqslant \alpha < 1$, prin

$$\bar{\psi}_\alpha x = \begin{cases} 1 \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant \alpha \\ 0 \text{ dacă } \alpha < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Deci avem

$$\gamma = \bar{\varphi}_1 \qquad\qquad \eta = \bar{\psi}_0.$$

Avem

$$\bar{\varphi}_\alpha x \leqslant \bar{\psi}_\alpha x$$

şi dacă $\alpha < \beta$

$$\bar{\varphi}_\alpha x \leqslant \bar{\varphi}_\beta x$$

$$\bar{\psi}_\alpha x \leqslant \bar{\psi}_\beta x.$$

În cazul bivalent $N = \eta = \gamma$, *principiul terțiului exclus*

$$\Rightarrow (p \vee Np)$$

şi *principiul contradicției*

$$(p \,\&\, Np)$$

sînt valabile.

Faptul că în L pentru $n \geqslant 3$, N, η, γ sînt diferite, arată că *principiul dublei negații* (valabil pentru N) *acela al terțiului exclus* (valabil pentru γ) şi *acela al contradicției* (valabil pentru η) *sînt identice.*

§4. **Functorii modali**

Aserțiunea

1. afirm p

poate fi ea însăşi nuanțată prin afirmațiile* :

2. afirm p ca necesar ;
3. afirm p ca posibil.

Aceste propoziții de tip II pot fi înlocuite prin propoziții de tip I, dacă se introduc conectorii modali μ_1, μ_2 care transformă propozițiile 1—3 în

$$\Rightarrow (p), \ \Rightarrow(\mu_2 p), \ \Rightarrow(\mu_1 p).$$

---

* Pentru afirmațiile

este imposibil ca Np ;
nu este necesar ca Np

şi negațiile

este posibil ca Np ;
este necesar ca Np ;

pe care le putem construi ca diferite de ν, μ, γ, η vezi notele bibliografice § I.

Vom pune

$$(\mu_1 p) \Leftrightarrow (\eta\eta p),$$
$$(\mu_2 p) \Leftrightarrow (\gamma\gamma p).$$

În logicile L_3, L_n, L_ρ, L_λ, avem

$$\mu_2 x = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x > 0 \\ 0 \text{ dacă } x = 0, \end{cases}$$

$$\mu_1 x = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x = 1 \\ 0 \text{ dacă } x < 1. \end{cases}$$

În aceste logici avem asețiuni nuanțate:

$$\varphi_\alpha = \bar{\varphi}_\alpha \breve{\varphi}_\alpha,$$
$$\psi_\alpha = \bar{\psi}_\alpha \breve{\psi}_\alpha.$$

Avem deci, în logica trivalentă, două asețiuni ale unei propoziții p:

1. Aserțiunea necesară

$$V_{\text{III}}(p) = 1,$$

deci $V_{\text{III}}(\nu p) = 1$, deci $\vdash \nu p$; aserțiunea $\vdash p$ înseamnă

p este adevărată,

adică

$$V_{\text{III}}(p) = 1,$$

deci

$$\vdash \nu p;$$

2. Aserțiunea problematică

$$V_{\text{III}}(p) \geqslant \frac{1}{2},$$

deci $V_{\text{III}}(\mu p) = 1$, deci

$$\vdash \mu_p.$$

Principiul care ne permite să deducem din

$$\frac{\vdash p}{\vdash \nu p}$$

este un principiu foarte important al logicii modale, enunțat de logicienii din evul mediu

unum quodque quandum est opportet esse

şi este foarte interesant să observăm că el este valabil în logica lukasiewicziană trivalentă.

Diferența dintre aserțiunea simplă

$$V_{IV}(p) \geqslant \frac{2}{3}$$

pe care o vom citi

p este adevărată

și aserțiunea necesară

$$V_{IV}(p) = 1,$$

pe care o vom citi

p este necesar adevărată,

poate fi făcută în logica tetravalentă.

§5. „Paradoxurile" implicației materiale

Implicația în logica bivalentă definită prin

→	0	1
0	1	1
1	0	1

a provocat numeroase discuții în jurul observației următoare:

propozițiile

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p),$$

$$p \vee (p \rightarrow q)$$

sînt totdeauna adevărate. Demonstația acestui fapt nu este

dificilă; în virtutea principiului implicației adevăratului prin fals (cap.XI, §2)

sau q este adevărată şi, în
acest caz $p \to q$ este adevărată,
sau q este falsă şi, în acest
caz, $q \to p$ este adevărată

şi

sau p este adevărată sau
p este falsă, deci $p \to q$

este adevărată.

Se poate trage o concluzie importantă: traducerea semnului „→" prin expresia „atrage (implică) după sine" nu este corectă. Noi am arătat că această expresie are mai multe semnificații.

Putem să-i dăm, de asemenea, semnificația de „implicație materială bivalentă", care este aceea a semnului „→" definit mai sus.

Acela care a transformat această observație în teorie a fost C. I. Lewis, care a introdus logica implicației stricte.

§6. Implieaţie şi modalitate

În cazul trivalent, implicația lui Łukasiewicz şi implicația — reziduație introdusă în §2 se foloseşte, în raport cu modalitățile μ_1 (posibilitate) şi μ_2 (necesitate), de anumite proprietăți pe care vrem să le punem în evidență

dacă p atrage după sine q,
atunci posibilitatea lui p (1)
o atrage după sine pe aceea a lui q,

ceea ce se scrie

$$(p \to q) \Rightarrow (\mu_1 p \to \mu_1 q) \qquad (1')$$

şi

dacă p atrage după sine q
atunci necesitatea lui p o atrage (2)
după sine pe aceea a lui q,

ceea ce se scrie

$$(p \rightarrow q) \Rightarrow (\mu_2 p \rightarrow \mu_2 q). \tag{2'}$$

Dar, ceea ce este specific cazului trivalent este ceea ce numim principiul determinării

$$(\mu_1 p \rightarrow \mu_1 q,\ \mu_2 p \rightarrow \mu_2 q) \Rightarrow (p \rightarrow q). \tag{3}$$

Pentru acest caz

$$\begin{aligned} &\mu_2(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\mu_2 p \rightarrow \mu_2 q) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\mu_1 p \underset{L}{\rightarrow} \mu_1 q) \Leftrightarrow (\mu_2 p \underset{L}{\rightarrow} \mu_2 q), \end{aligned} \tag{4}$$

în timp ce

$$\mu_1(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\mu_1 p \rightarrow \mu_1 q) \Leftrightarrow (\mu_1 p \underset{L}{\rightarrow} \mu_1 q). \tag{5}$$

Capitolul XIII

ALGEBRA MULȚIMILOR NUANȚATE

§1. Disjuncția și conjuncția

Dacă două propoziții sînt propoziții de apartenență la mulțimi nuanțate în logica cu trei valori, trebuie să definim semnificația propoziției

$$(x \in \mathcal{A})\ \&\ (x \in \mathcal{B}). \quad (1)$$

Dacă $\mathcal{A} = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 \rangle$ și $\mathcal{B} = \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 \rangle$ vom numi $A \cap B$ perechea $\langle \mathbf{a}_2 \cap \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_1 \cap \mathbf{b}_1 \rangle$. Deoarece, A și B fiind mulțimi nuanțate, $\mathbf{a}_1 \supset \mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1 \supset \mathbf{b}_2$, vom avea $\mathbf{a}_1 \cap \mathbf{b}_1 \supset \mathbf{a}_2 \cap \mathbf{b}_2$, deci perechea $\langle \mathbf{a}_2 \cap \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_1 \cap \mathbf{b}_1 \rangle$ este o mulțime nuanțată.

Propoziția (1), va avea semnificația

$$x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}. \quad (2)$$

Se pot demonstra riguros următoarele trei egalități

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}, \quad (3)$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}, \quad (4)$$

$$\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})\ \mathcal{A} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C}, \quad (5)$$

pentru mulțimile nuanțate în logica trivalentă, după ce am definit egalitatea a două mulțimi nuanțate

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}. \quad (6)$$

Această egalitate — egalitatea bivalentă — va fi definită prin

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1,\ \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2 \quad (7)$$

care au un sens, căci $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, sînt mulțimi ordinare și egalitatea a două mulțimi ordinare a fost deja definită mai sus (conțin aceleași elemente).

Care este semnificaţia propoziţiei

$$(x \in \mathcal{A}) \vee (x \in \mathcal{B}). \tag{8}$$

Vom numi $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ perechea $<\mathbf{a}_2 \cup \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_1 \cup \mathbf{b}_1>$. Deoarece $\mathbf{a}_1 \cup \mathbf{b}_1 \supset \mathbf{a}_2 \cup \mathbf{b}_2$, vedem că $<\mathbf{a}_2 \cup \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_1 \cup \mathbf{b}_1>$ este o mulţime nuanţată; (8) are semnificaţia

$$x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}. \tag{9}$$

Se pot demonstra legile de idempotenţă, de comutativitate şi de asociativitate pentru operaţia „$\cup$" cu mulţimi nuanţate:

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{A} = \mathcal{A}, \tag{10}$$

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}, \tag{11}$$

$$\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C}, \tag{12}$$

legile de absorbţie:

$$\mathcal{A} \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mathcal{A}, \tag{13}$$

$$\mathcal{A} \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \mathcal{B}. \tag{14}$$

şi legile de distributivitate*

$$\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}), \tag{15}$$

$$\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}). \tag{16}$$

Demonstraţia proprietăţilor (3)—(5), (10)—(16) este făcută, întrebuinţîndu-se aceleaşi legi ca pentru mulţimile ordinare. Iată un exemplu. Proprietatea (15) pentru mulţimile nuanţate

$$\mathcal{A} = <\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1>, \mathcal{B} = <\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1>, \mathcal{C} = <\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1>$$

este

$$< \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 \cap (< \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1> \cap < \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1 >) =$$

$$=(<\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1> \cap <\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1>) \cup (<\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1> \cap <\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1 >);$$

* În cap. X, §3 nu am introdus aceste legi, deoarece ele nu par imediate; dealtfel ele nu sînt valabile în logica mecanicii cuantice.

Ea este adevărată deoarece:

$$<\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1> \cap (<\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_1> \cup <\mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_1>) = <\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1> \cap$$

$$\cap (\mathfrak{b}_2 \cup \mathfrak{c}_2, \mathfrak{b}_1 \cup \mathfrak{c}_1>) = <\mathfrak{a}_2 \cap (\mathfrak{b}_2 \cup \mathfrak{c}_2), \mathfrak{a}_1 \cap (\mathfrak{b}_1 \cup \mathfrak{c}_1)> =$$

$$= <(\mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{b}_2) \cup (\mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{c}_2), (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{b}_1) \cup (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{c}_1)> =$$

$$= <\mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{b}_1> \cup <\mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{c}_2, \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{c}_1> =$$

$$= (<\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1> \cap < \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_1>) \cup (<\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1> \cap <\mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_1>)$$

în virtutea

$$\mathfrak{a}_2 \cap (\mathfrak{b}_2 \cup \mathfrak{c}_2) = (\mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{b}_2) \cup (\mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{c}_2).$$

$$\mathfrak{a}_1 \cap (\mathfrak{b}_1 \cup \mathfrak{c}_1) = (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{b}_1) \cup (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{c}_1),$$

căci $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{c}_2$ sînt mulţimi ordinare, pentru care legile de distributivitate de mai sus sînt valabile*.

Într-o logică L_λ-valentă vom pune

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$$

dacă

$$\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{b}_\alpha$$

pentru orice α şi

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B},$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$$

dacă

$$\mathfrak{c}_\alpha = \mathfrak{a}_\alpha \cap \mathfrak{b}_\alpha.$$

$$\mathfrak{d}_\alpha = \mathfrak{a}_\alpha \cup \mathfrak{b}_\alpha.$$

Vedem cu uşurinţă că legile (3) — (5), (10) — (16) sînt valabile.

O mulţime de elemente — aici mulţimea mulţimilor nuanţate $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ — formează o *latice* dacă sînt date

---

* Dacă $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, sînt mulţimi, vedem că $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} \cup \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \cup \cup (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c})$ (fig. 44—47).

În acelaşi fel $\mathfrak{a} \cup (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{c})$ (fig. 48, 49).

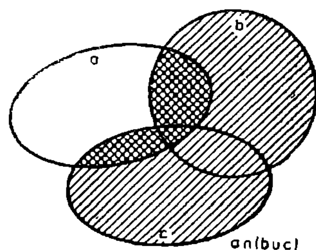


Fig. 44

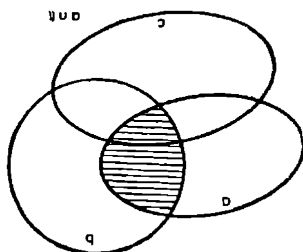


Fig. 45

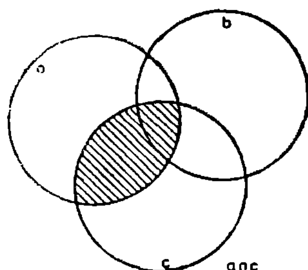


Fig. 46

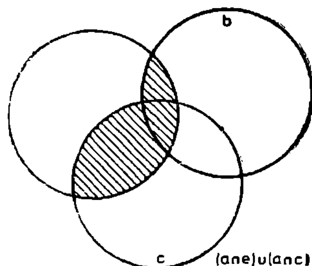


Fig. 47

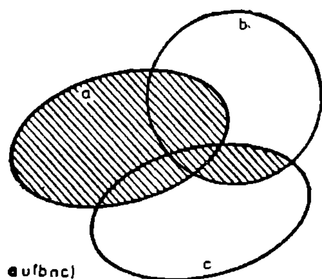


Fig. 48

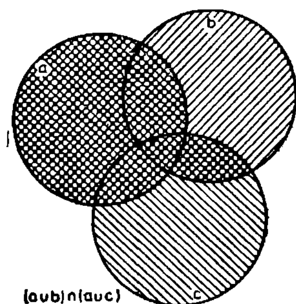


Fig. 49

două legi de compunere „$\cap$", „$\cup$" pentru care aceste egalităţi (3) — (5), (10)—(14), sînt satisfăcute. Laticea este *distributivă*, dacă (15), (16) sînt satisfăcute*.

---

* Nu ne ocupăm de independenţa axiomelor. Pentru această problemă a se vedea cartea lui S. Rudeanu, *Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene*, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1963.

§2. Incluziunea bivalentă

În această latice, ca în orice latice, relațiile

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{A},$$

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B}$$

sînt echivalente; această relație va fi notată

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$$

și va fi numită *incluziune bivalentă.*
Această relație este reflexivă

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{A},$$

tranzitivă

$$\text{dacă } \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \text{ și } \mathcal{B} \subset \mathcal{C} \text{ atunci } \mathcal{A} \subset \mathcal{C}$$

și antisimetrică

$$\text{dacă } \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \text{ și } \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \text{ atunci } \mathcal{A} = \mathcal{B},$$

deci este o relație de ordine.

§3. Negația simetrică

Fie $\bar{\mathbf{a}}$ complementara mulțimii **a**. Dacă

$$\mathcal{A} = <\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1>$$

cu $\mathbf{a}_2 \subset \mathbf{a}_1$ avem pentru complementară $\bar{\mathbf{a}}_1 \subset \bar{\mathbf{a}}_2$*

$$N\mathcal{A} = <\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2>. \tag{17}$$

Se poate demonstra ușor că

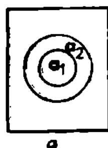
$$NN\mathcal{A} = \mathcal{A} \tag{18}$$

$$N(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = N(\mathcal{A} \cup N\mathcal{B}, \quad N(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = N\mathcal{A} \cap N\mathcal{B} \tag{19}$$

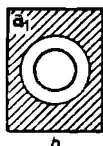
$$\text{dacă } \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \text{ atunci } N\mathcal{B} \subset N\mathcal{A}. \tag{20}$$

---

* Aceasta este legea contrapunerii (fig. 50 *a, b, c*).



a


b

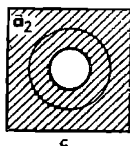

c

Fig. 50,a,b,c

Să considerăm cele două mulțimi nuanțate

$$0 = <\varnothing, \ \varnothing>, \qquad (21)$$
$$1 = <I, \ I>.$$

Se arată fără dificultăți că

$$0 \cap \mathcal{A} = 0, \qquad 0 \cup \mathcal{A} = \mathcal{A}, \qquad (22)$$
$$1 \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}, \qquad 1 \cup \mathcal{A} = 1.$$

În logica bivalentă avem

$$\mathbf{a} \cup \bar{\mathbf{a}} = I, \qquad (*)$$
$$\mathbf{a} \cap \bar{\mathbf{a}} = \varnothing,$$

dar asemenea egalități nu sînt valabile pentru mulțimile nuanțate; *pentru mulțimile nuanțate principiul dublei negații, legile lui de Morgan și principiul contrapunerii sînt valabile,* dar *nici principiul terțiului exclus, nici principiul contradicției nu mai sînt valabile pentru negația simetrică.*

Nu este greu de definit negația simetrică N în logica polivalentă; dacă

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_\alpha\} \qquad N\mathcal{A} = \{\mathbf{b}_\alpha\}$$

atunci vom presupune

$$\mathbf{b}_{\alpha+} = \bar{\mathbf{a}}_{1-\alpha,\,-} \qquad \mathbf{b}_{\alpha-} = \bar{\mathbf{a}}_{1-\alpha,\,+}.$$

O latice distributivă în care este dată o funcție N cu o variabilă care satisface condițiile (18), (19), adică principiul dublei negații și legile lui A. de Morgan va fi numită o *algebră de Morgan.* Deci *mulțimile nuanțate formează o algebră de Morgan*; evident, o asemenea algebră de Morgan este asociată fiecărei mulțimi de indivizi I.

§4. Mulțimile nuanțate chrisipiene

În logica cu trei valori, mulțimile nuanțate avînd structura

$$\mathcal{A} = <\mathbf{a}, \mathbf{a}>$$

posedă proprietăți remarcabile. Ele vor fi numite *mulțimi chrisipiene*. Începem prin a observa că perechea ordonată $<\mathbf{a}, \mathbf{a}>$ *nu este* elementul **a**; ea este o mulțime nuanțată, în timp ce **a** este o mulțime ordinară.

Este ușor de văzut că dacă mulțimile nuanțate $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sînt chrisipiene, atunci $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $N\mathcal{A}$ sînt și ele chrisipiene.

Condiția necesară și suficientă pentru ca $\mathcal{A}$ să fie chrisipiană este dată printr-una dintre egalitățile:

$$\mathcal{A} \cup N\mathcal{A} = 1,$$
$$\mathcal{A} \cap N\mathcal{A} = 0. \qquad (*)$$

Este ușor să arătăm că, dacă $\mathcal{A}$ este chrisipiană, atunci ea satisface aceste condiții. Teorema reciprocă este consecința faptului că într-o latice distributivă sistemul de ecuații

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{X} = 1, \qquad \mathcal{A} \cap \mathcal{X} = 0$$

dacă are o soluție, această soluție este unică.

O algebră de Morgan cu prim element și cu ultim element (0 și 1) este numită o algebră Boole dacă condițiile (*) sînt satisfăcute.

În cazul logicii L_λ-valente o mulțime nuanțată $\mathcal{A}$ va fi numită chrisipiană dacă $\mathbf{a}_\alpha$ nu variază cu α; proprietățile enunțate mai sus rămîn valabile.

§5. Funcțiile modale

În logica cu trei valori fiecărei mulțimi nuanțate $\mathcal{A} = <\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1>$ i se vor asocia două mulțimi chrisipiene:

$$\mu_1\mathcal{A} = <\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1>,$$
$$\mu_2\mathcal{A} = <\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2>,$$

cu

$$\mu_2\mathcal{A} \subset \mu_1\mathcal{A}.$$

Vedem că μ_1 şi μ_2 sînt funcţii avînd ca argumente şi ca valori mulţimi nuanţate:

$$\mu_1 : \mathcal{A} \mapsto \mu_1\mathcal{A},$$

$$\mu_2 : \mathcal{A} \mapsto \mu_2\mathcal{A},$$

funcţii definite prin

$$\mu_1 : <\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2> \mapsto <\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1>,$$

$$\mu_2 : <\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2> \mapsto <\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2>.$$

Mulţimile nuanţate chrisipiene sînt caracterizate printr-una dintre egalităţile:

$$\mathcal{A} = \mu_1\mathcal{A}, \qquad \mathcal{A} = \mu_2\mathcal{A},$$

$$\mu_1\mathcal{A} = \mu_2\mathcal{A}.$$

Într-o logică cu n valori există $n-1$ asemenea funcţii, dacă

$$\mathcal{A} = <\mathbf{a}_{n-1}, \qquad \mathbf{a}_1>$$

cu $\mathbf{a}_1 \supset, \qquad \supset \mathbf{a}_{n-1}$ atunci aceste funcţii $\mu_1, \qquad \mu_{n-1}$ sînt

$$\mu_1\mathcal{A} = <\mathbf{a}_1, \qquad \mathbf{a}_1>,$$

$$\mu_{n-1}\mathcal{A} = <\mathbf{a}_{n-1}, \qquad \mathbf{a}_{n-1}>$$

şi avem

$$\mu_1\mathcal{A} \supset \qquad \supset \mu_{n-1}\mathcal{A}.$$

Pentru proprietăţile acestor funcţii trimitem la lucrări speciale*.

---

* În lucrările publicate pînă în prezent aceste funcţii au fost numite $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$

$$\mu_1 = \sigma_{n-1}, \ldots, \mu_{n-1} = \sigma_1$$

şi, pentru $n = 3$, am scris

$$\nu = \mu_2 = \sigma_1, \ \mu = \mu_1 = \sigma_2.$$

În cazul valorilor în L_ρ sau L_λ vom numi $\mu_\Omega \mathcal{A}$ mulțimea nuanțată chrisipiană avînd toate componentele egale cu $\mathbf{a}_\Omega$.

§6. Interpretarea funcțiilor modale

În §5. am asociat fiecărei mulțimi nuanțate $\mathcal{A} = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 \rangle$ în logica trivalentă cele două mulțimi nuanțate $\mu_1\mathcal{A}(\mu_1\mathcal{A} = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle)$ și $\mu_2\mathcal{A}(\mu_2\mathcal{A} = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 \rangle)$ deci μ_1 și μ_2 sînt funcții avînd ca argumente și ca valori mulțimi nuanțate.

Vom întrebuința funcțiile μ_1, μ_2 care fiecărei propoziții de apartenență nuanțată p:

$$a \varepsilon \mathcal{A}$$

face să-i corespundă următoarele două propoziții de apartenență nuanțată

$$a \varepsilon \mu_1 \mathcal{A},$$

$$a \varepsilon \mu_2 \mathcal{A},$$

care vor fi numite: $\mu_1 p$ și $\mu_2 p$, μ_1 și μ_2 fiind niște funcții care la fiecare propoziție p face să-i corespundă cele două propoziții

$$\mu_1 p,$$

$$\mu_2 p,$$

Iată valorile logice ale acestor propoziții:

I. dacă $V_{III}(a \varepsilon \mathcal{A}) = 1$ atunci $a \in \mathbf{a}_2$, deci $V_{III}(a \varepsilon \mu_2\mathcal{A}) = 1$, deci $V_{III}(\mu_2 p) = 1$; dar din $a \in \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_2 \subset \mathbf{a}_1$ rezultă $a \in \mathbf{a}_1$, deci $V_{III}(a \varepsilon \mu_1 \mathcal{A}) = 1$, deci $V_{III}(\mu_1 p) = 1$;

II. dacă $V_{III}(a \varepsilon \mathcal{A}) = \frac{1}{2}$ atunci $a \in \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, deci $a \in \mathbf{a}_1$, deci $V_{III}(a \varepsilon \mu_1 \mathcal{A}) = 1$, deci $V_{III}(\mu_1\, p) = 1$ și $a \notin \mathbf{a}_2$, deci $V_{III}(a \varepsilon \mu_2 \mathcal{A}) = 0$, deci $V_{III}(\mu_2\, p) = 0$.

III. dacă $V_{III}(p) = 0$ atunci $V_{III}(a \varepsilon \mathcal{A}) = 0$, deci $a \notin \mathbf{a}_1$, deci $V_{III}(a \varepsilon \mu_1 \mathcal{A}) = 0$, deci $V_{III}(\mu_1 p) = 0$ și, deoarece

$a \not\subseteq \mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2 \subset \mathbf{a}_1$, avem $a \not\subseteq \mathbf{a}_2$, deci $V_{III}(a\varepsilon\mu_2\mathfrak{A}) = 0$, deci $V_{III}(\mu_2 p) = 0$.

Deci: *valorile propozițiilor* $a\varepsilon\mu_1\mathfrak{A}$, $a\varepsilon\mu_2\mathfrak{A}$ *nu depind decît de valoarea propoziției* $a\varepsilon\mathfrak{A}$ *și ele sînt date de*

$V_{III}(a\varepsilon\mathfrak{A})$	0	$\frac{1}{2}$	1
$V_{III}(a\varepsilon\mu_1\mathfrak{A})$	0	1	1
$V_{III}(a\varepsilon\mu_2\mathfrak{A})$	0	0	1

Comparînd aceste rezultate cu acelea din cap.X, §3, vedem că pentru cele două tipuri de propoziții trivalente

$$a\varepsilon\mathfrak{A},$$

$$a = b,$$

se introduc doi *conectori monari*, $\mu_1 p$, $\mu_2 p$ care sînt transformările

$$p \to \mu_1 p,$$

$$p \to \mu_2 p,$$

cu: *valorile logice ale propozițiilor* $\mu_1 p$, $\mu_2 p$ *nu depind decît de valoarea logică a lui* p și ele sînt

$$V_{III}(\mu_1 p) = \mu_1 V_{III}(p),$$

$$V_{III}(\mu_2 p) = \mu_2 V_{III}(p),$$

unde μ_1, μ_2 sînt funcții

$$\mu_1 \; L_3 \mapsto L_3,$$

$$\mu_2 : L_3 \mapsto L_3,$$

date prin

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\mu_1 x$	0	1	1
$\mu_2 x$	0	0	1

Putem citi $\mu_1 p$ şi $\mu_2 p$

este posibil ca p^*,

este necesar ca p^*,

de exemplu, dacă p este propoziţia

este frig,

atunci $\mu_1 p$ şi $\mu_2 p$ sînt

este posibil să fie frig,

este necesar să fie frig,

deci p^* este

să fie frig.

De exemplu, vom citi $\mu_1(a \varepsilon \mathcal{A})$, $\mu_2(a \varepsilon \mathcal{A})$:

este posibil ca a să aparţină lui $\mathcal{A}$,

este necesar ca a să aparţină lui $\mathcal{A}$,

şi vom citi $\mu_1(a = b)$, $\mu_2(a = b)$:

este posibil ca a să fie identic cu b,

este necesar ca a să fie identic cu b.

Vedem că propoziţiile, la prima privire echivalente din punct de vedere semantic

este posibil ca $p^* \equiv_s$,

p este posibil

este necesar ca $p^* \equiv_s$ (*)

p este necesar

au două interpretări :

$\mu_1 p$ respectiv $\mu_2 p$

$$V_{III}(p) \geqslant \frac{1}{2}, \text{ respectiv } V_{III}(p) = 1.$$

A doua este formată din propoziţii de al doilea tip : $V_{III}(p) \geqslant \frac{1}{2}$, $V_{III}(p) = 1$, care au drept subiect propoziţia

de primul tip p. Prima intepretare ne dă propoziții $\mu_1 p$, $\mu_2 p$ de același tip ca p.

Dealtfel, trebuie să remarcăm că limba naturală distinge aceste două interpretări.

§7. Interpretarea negației

Suprapunînd μ_1, μ_2, N, avem doi noi conectori

$\eta_1 p = N\mu_1 p =$ nu este posibil ca p*,

$\mu_2 Np =$ este necesar ca Np,

$\eta_2 p = N\mu_2 p =$ nu este necesar ca p*.

$\mu_1 Np =$ este posibil ca Np.

Aici Np este una dintre formele lingvistice ale negației date în cap. XII, §3.

De exemplu, negația propoziției trivalente

$$a \varepsilon \mathfrak{A}$$

este

$$a \varepsilon N\mathfrak{A},$$

unde funcția N

$$N \quad \mathfrak{A} \rightarrow N\mathfrak{A},$$

care transformă mulțimea nuanțată $\mathfrak{A}$ în $N\mathfrak{A}$ este dată în §3

Negația propoziției trivalente.

$$a = b,$$

unde „=" este clasificarea cu două nivele ($\equiv_2$, $\equiv_1$) este propoziția trivalentă

$$a \neq b,$$

unde $\neq$ este relația trivalentă ($\neq_1$, $\neq_2$).

Deoarece

$V_{III}(a \varepsilon \mathfrak{A})$	$0 \quad \frac{1}{2} \quad 1$
$V_{III}(a \varepsilon N\mathfrak{A})$	$1 \quad \frac{1}{2} \quad 0$

dacă $\mathfrak{A} = <\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1>$, atunci $N\mathfrak{A} = (\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2)$, căci dacă $V_{III}(a\varepsilon\mathfrak{A}) = 0$, atunci $a \notin \mathbf{a}_1$, deci, deoarece $\mathbf{a}_2 \subset \mathbf{a}_1$, $a \notin \mathbf{a}_2$, deci $a \in \bar{\mathbf{a}}_1$, $a \in \bar{\mathbf{a}}_2$, deci $V_{III}(a\varepsilon N\mathfrak{A}) = 1$; dacă $V_{III}(a\varepsilon\mathfrak{A}) = \frac{1}{2}$, atunci $a \in \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, deci $a \in \mathbf{a}_1$, $a \in \mathbf{a}_2$, deci $a \notin \bar{\mathbf{a}}_1$, $a \in \bar{\mathbf{a}}_2$, deci $a \in \bar{\mathbf{a}}_2 - \bar{\mathbf{a}}_1$, deci $V_{III}(a\varepsilon N\mathfrak{A}) = \frac{1}{2}$; dacă $V_{III}(a\varepsilon\mathfrak{A}) = 1$, atunci $a\varepsilon\mathbf{a}_2$, deci $a\varepsilon\mathbf{a}_1$, deci $a \notin \bar{\mathbf{a}}_2$, deci $V_{III}(a\varepsilon N\mathfrak{A}) = 0$.

Vedem că în logica trivalentă, fiecărei propoziţii p i se asociază trei negaţii

$$N : p \mapsto N,$$

$$\eta_1 : p \mapsto \eta_1 p,$$

$$\eta_2 : p \mapsto \eta_2 p,$$

astfel încît *valorile logice* $V_{III}(Np)$, $V_{III}(\eta_1 p)$, $V_{III}(\eta_2 p)$ *nu depind decît de valoarea logică* $V_{III}(p)$:

$$V_{III}(Np) = NV_{III}(p),$$

$$V_{III}(\eta_1 p) = \eta_1 V_{III}(p),$$

$$V_{III}(\eta_2 p) = \eta_2 V_{III}(p),$$

unde N, η_1, η_2 sînt funcţiile:

$$N : L_3 \to L_3,$$

$$\eta_1 : L_3 \to L_3,$$

$$\eta_2 : L_3 \to L_3$$

date prin:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
Nx	1	$\frac{1}{2}$	0
$\eta_1 x$	1	0	0
$\eta_2 x$	1	1	0

Deoarece

$$(\eta_1 p) \Rightarrow (Np) \Rightarrow (\eta_2 p), \qquad \text{(I)}$$

vom numi η_1 negația tare (imposibilitate), η_2 negația slabă (non-necesitate) și N negația simetrică. Există deci cele trei tipuri de negație care corespund celor trei tipuri de aserțiuni: aserțiune slabă sau posibilitate $\mu_1 p$, aserțiunea tare sau necesitate $\mu_2 p$ și aserțiunea simplă p:

$$(\mu_2 p) \Rightarrow (p) \Rightarrow (\mu_1 p). \qquad \text{(II)}$$

§8. Observații asupra cuvintelor „posibil" și „eventual"

Cuvintele posibil și eventual au fiecare două semnificații pe care este periculos să le confundăm:

I). „Posibil" înțeles ca „posibilitatea de a fi aceasta", deci „non-imposibilitate"; conectorul asociat acestei idei este conectorul μ_1 de mai sus

$$\mu_1 = N\eta_1.$$

„Imposibilul" este „non-posibil"

$$\eta_1 = N\mu_1,$$

posibilitatea negației, care este non-necesitatea sa

$$\eta_2 = \mu_1 N,$$

$$\eta_2 = N\mu_2,$$

este numită cîteodată eventualitate;

Unei mulţimi nuanţate oarecare (chrisipiană sau nu)

$$\mathcal{A} = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 \rangle$$

îi corespund două mulţimi nuanţate chrisipiene

$$\mu_1\mathcal{A} = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle,$$

$$\mu_2\mathcal{A} = \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 \rangle.$$

Această corespondenţă este biunivocă, dacă

$$\mu_1\mathcal{A} = \mu_1\mathfrak{B},$$

$$\mu_2\mathcal{A} = \mu_2\mathfrak{B},$$

atunci $\mathcal{A} = \mathfrak{B}$. Această proprietate a fost numită *principiu de determinare.*

Am făcut să corespundă fiecărei propoziţii de apartenenţă nuanţată (vezi cap.I, §2).

$$a \varepsilon \mathcal{A}$$

o pereche de propoziţii de apartenenţă ordinară

$$a \varepsilon \mathbf{a}_2, \qquad a \varepsilon \mathbf{a}_1$$

şi fiecărei propoziţii de identitate nuanţată

$$a = b$$

o pereche de propoziţii de echivalenţă bivalentă

$$a \equiv_2 b, \qquad a \equiv_1 b.$$

În general, fiecărei propoziţii trivalente p facem să-i corespundă o pereche de propoziţii $\mu_2 p$, $\mu_1 p$. Se poate arăta că propoziţiile de forma

$$\mu_1 p, \ \mu_2 p, \ \eta_1 p, \ \eta_2 p$$

satisfac legile logicii bivalente. Avem aici o teoremă de reprezentare a logicii trivalente pe logica bivalentă, care poate fi extinsă la logicile cu n valori, cu valori în L_ρ, în L_λ sau în L_θ.

II). „Posibilitate" înţeles ca „posibilitate de a fi şi de a nu fi aceasta"; conectorul asociat este

$$\tau p = \mu_1 p \,\&\, \eta_2 p,$$

$$= \mu_1 p \,\&\, \mu_1 N p$$

aceasta este negația (N) a alternativei necesitate sau imposibilitate

$$\tau p = N(\mu_2 p \vee \eta_1 p)$$

și aceasta este de asemenea non-necesitatea ($N\mu_2$) a acestei alternative

$$\tau p = N\mu_2(\mu_2 p \vee \eta_1 p).$$

§9. **Rolul propozițiilor chrisipiene**

În §4 am introdus mulțimi nuanțate avînd structura <**a**, **a**> și le-am numit *mulțime nuanțată chrisipiană*. Am subliniat faptul că mulțimea nuanțată <**a**, **a**> *nu este* mulțimea ordinară **a**. Totuși vrem să remarcăm că, între mulțimile nuanțate chrisipiene și mulțimile ordinare există o corespondență

<**a**, **a**> ↦ **a**,

care face să-i corespundă o mulțime ordinară **a** fiecărei mulțimi nuanțate chrisipiene <**a**, **a**> și că fiecare mulțime ordinară **a** corespunde în acest fel unei mulțimi nuanțate chrisipiene <**a**, **a**>*.

Algebra mulțimilor nuanțate chrisipiene este identică cu algebra mulțimilor ordinare**.

§10. **Funcții de adevăr**

Am distins funcțiile

$$N, \mu_1, \mu_2, \eta_1, \eta_2,$$

care fac să-i corespundă fiecărei propoziții p, propozițiile

$$Np, \mu_1 p, \mu_2 p, \eta_1 p, \eta_2 p,$$

---

* Se spune că această corespondență este biunivocă sau că ea este o bijecție.

** Se spune că aceasta este o algebră booleană.

funcțiile

$$N,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \eta_1,\ \eta_2,$$

care fac să-i corespundă fiecărui element al lui L_3 elementul lui L_3 dat prin tabelele corespunzătoare.

O funcție φ care face să corespundă fiecărei propoziții p o propoziție φp

$$\varphi : p \mapsto \varphi p$$

va fi numită o funcție de adevăr pentru logica bivalentă, trivalentă, n-valentă, L_ρ-valentă, L_λ-valentă sau L_θ-valentă dacă există o funcție

$$\varphi : L \to L,$$

astfel încît

$$V(\varphi p) = \varphi(V(p)).$$

Aceasta se întîmplă pentru funcțiile de mai sus.

Evident, această definiție poate fi extinsă la cazul unui număr oarecare de variabile. Acesta este rolul formulelor

$$V(p \ \&\ q) = V(p) \cap V(q),$$

$$V(p \vee q) = V(p) \cup V(q)$$

din cap. XII, §1.

§11. Suprapunerea conectorilor modali

Observația făcută în §7 că următoarele două propoziții în limbaj simbolic

$$\mu_1 p \text{ și } V_{\mathrm{III}}(p) \geqslant \frac{1}{2}$$

au aceeași traducere în limba naturală,

p este posibil,

la fel ca următoarele două propoziții în limbaj simbolic

$$\mu_2 p \text{ și } V_{\mathrm{III}}(p) = 1,$$

care au aceeaşi traducere în limba naturală,

p este necesar,

ne conduce la întrebarea dacă scrierile

$\mu_1 p$ şi $\mu_2 p$

prezintă sau nu anumite avantaje.

Să remarcăm că $\mu_1 p$ şi $\mu_2 p$ fiind propoziţii de acelaşi tip, se pot forma propoziţiile:

$\mu_1\mu_1 p$, $\mu_1\mu_2 p$,
$\mu_2\mu_1 p$, $\mu_2\mu_2 p$,

şi, de asemenea, propoziţii avînd structurile

$\mu_1\mu_1$ $\mu_1 p$
$\mu_2\mu_1$ $\mu_1 p$

Ele sînt traduse prin

este posibil ca p să fie posibil,
este posibil să fie posibil ca p,

este posibil ca p să fie necesar,

Trebuie identificate anumite modalităţi suprapuse?

Trebuie stabilit un principiu al *dublei posibilităţi*

posibilitatea posibilităţii (1)
este posibilitatea simplă?

sau un *principiu al dublei necesităţi*

necesitatea necesităţii (2)
este necesitatea simplă?

Trebuie identificate

posibilitatea şi necesitatea (3)
posibilităţii?

şi

necesitatea şi posibilitatea (4)
necesităţii?

Principiile (1)—(4) sînt valabile în logica trivalentă. Dacă explicaţia matematică

$$(\mu_1\mu_1 p) \Leftrightarrow (\mu_1 p), \quad (1')$$

$$(\mu_2\mu_2 p) \Leftrightarrow (\mu_2 p), \quad (2')$$

$$(\mu_1\mu_2 p) \Leftrightarrow (\mu_2 p) \quad (3')$$

$$(\mu_2\mu_1 p) \Leftrightarrow (\mu_1 p) \quad (4')$$

este uşoară*, interpretările lor depind de statutul ontologic al modalităţilor**.

---

* Se construieşte tabelul

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\mu_1 x$	0	1	1
$\mu_2 x$	0	0	1
$\mu_1\mu_1 x$	0	1	1
$\mu_2\mu_2 x$	0	0	1
$\mu_1\mu_2 x$	0	0	1
$\mu_2\mu_1 x$	0	1	1

şi se citesc pe acest tabel echivalenţele (1′) — (4′).

** Să semnalăm identităţile următoare valabile în logica trivalentă:

$$(\eta_1\eta_1 p) \Leftrightarrow (\mu_1 p), \quad (5')$$

care traduce un principiu al dublei imposibilităţi

dubla imposibilitate
echivalează cu posibilitatea. (5)

Principiile următoare

$$(\eta_2\eta_2 p) \Leftrightarrow (\mu_2 p), \quad (6')$$

care se vor enunţa

non-necesitatea non-necesităţii echivalează cu
necesitatea, (6*)

sau încă

posibilitatea negaţiei
posibilităţii negaţiei
echivalează cu necesitatea (6**)

§12. Conceptul de fuzzy set în sensul lui Zadeh

Într-o succesiune de lucrări importante, L. Zadeh a introdus ideea de *fuzzy set*, a arătat importanţa sa pentru teoria generală a sistemelor şi a extins-o construind o teorie a *fuzzy automate*, a *fuzzy algorithms*, aplicînd-o în teoria gramaticilor formale etc.

Am cunoscut aceste cercetări ale lui L. Zadeh în 1967, la Congresul de la Bucureşti.

L. Zadeh pleacă de la ideea clasică: o mulţime E este o funcţie (funcţia caracteristică a mulţimii) f_E:

$$f_E : I \to L_2.$$

O *fuzzy-set* este o funcţie

$$f: I \to [0, 1],$$

care fiecărui individ $x \in I$ îi asociază o valoare reală $f(x)$, astfel încît $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Zadeh insistă asupra faptului că $f(x)$ *nu este o probabilitate* şi explică diferenţa între *randomness* şi *fuzziness*.

Această idee a lui Zadeh ne-a interesat foarte mult. Am interpretat funcţia f ca valoarea logică

$$f(x) = V_\lambda(x \varepsilon F)$$

unde $\mathfrak{F}$ este o *fuzzy set*, „ε" o nouă relaţie între individul x şi *fuzzy set* $\mathfrak{F}$ şi V_λ valoarea logică a unei propoziţii în logica L_λ-valentă.

---

sau chiar (vezi §9) principiul dublei eventualităţi

eventualitatea eventualităţii echivalează cu necesitatea (6***)

şi (vezi §9) principiul care mi-a fost indicat de M. von Wright

$$\tau\,\tau\,p = 0, \qquad (7)$$

care se va citi

eventualitatea eventualităţii este echivalentă cu falsul (7')

vor merita o discuţie care să pună în evidenţă dificultăţile traducerii în limba naturală a ideilor care se enunţă cu uşurinţă în limbaj simbolic şi limitele posibilităţii de transcriere a gîndirii umane în limba naturală.

Studiasem logicile cu trei sau cu un număr finit de valori încă din 1940 şi dădusem sisteme de axiome pentru algebra modelelor acestor logici. Ştiam cum să construim asemenea sisteme pentru logicile L_λ-valente sau L_ρ-valente, dar interesul pe care-l prezintă aceste logici nu ni s-a părut evident.

Chiar interesul pe care-l prezintă logicile cu trei valori ni s-a părut multă vreme îndoielnic. Ele nu puteau să redea ideile modale ale logicii clasice, nici silogismele modale.

Acesta este motivul pentru care între 1944 şi 1956 nu ne-am ocupat de logicile cu *n* valori.

Interesul nostru pentru logica cu trei valori a reînviat imediat ce ne-am dat seama, în 1956, că ea este adecvată studiului fenomenelor aleatoare în circuitele de comutaţie. Studiul altor tipuri de fenomene aleatoare a cerut încă din 1965 întrebuinţarea logicilor cu un număr finit oarecare de valori.

Din această cauză am fost foarte impresionaţi în 1967 cînd am cunoscut ideile lui Zadeh.

L. Zadeh construise disjuncţia, conjuncţia şi negaţia pentru *fuzzy-sets*. Am expus aceste cercetări în cap. XIII.

Algebrele lukasiewicziene *n*-valente (*n* finit) sînt definite cu ajutorul nu numai al conjuncţiei şi al disjuncţiei (cu sau fără negaţie), dar introduc de asemenea funcţiile modale (pozitive sau negative). Am putut da un sistem de axiome pentru cazul infinit, de îndată ce ne-am dat seama că el prezintă un interes anumit, ceea ce ne fusese demonstrat de lucrările lui Zadeh.

§13. Observaţie

Aşa cum am remarcat în cap.I, §5, în acest capitol am întrebuinţat simultan două limbi diferite:

I. *Limba nuanţată.* În această limbă se întrebuinţează indivizii *a*, ..., *z*, mulţimile nuanţate $\mathcal{A}$, — care pot fi chrisipiene —, propoziţiile nuanţate $a \in \mathcal{A}$ (polivalente) semnul negaţiei *N*, funcţiile modale μ_a, η_1; pentru semnele $=$, $\subset$, $\cap$, $\cup$, vezi mai jos.

II. *Limba ordinară.* În această limbă se întrebuinţează indivizii $a, \ldots, z$, mulţimile ordinare $\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{a}_1, \ldots$ perechile de mulţimi ordinare $<\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1>$, propoziţiile ordinare bivalente $a \in \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \subset \mathbf{b}$, semnul negaţiei „—"

Indivizii sînt aceiaşi în cele două limbi.

Semnele $\cap$, $\cup$ sînt echivoce: în $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ acestea sînt semnele limbii nuanţate, în $\mathbf{a} \cap \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \cup \mathbf{b}$ sînt semne ale limbii ordinare.

Propoziţiile bivalente $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ au fost studiate în cap.XII.

Capitolul XIV

RELAȚII DE CONSECINȚĂ NUANȚATĂ

§1. Relația trivalentă de consecință

Relația „$\Rightarrow$" între propozițiile

$$(p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (q) \tag{1}$$

este o relație bivalentă. Dacă vrem să introducem o relație trivalentă de consecință

$$(p_1, \ldots, p_n) \rightrightarrows (q) \tag{2}$$

trebuie să definim două relații bivalente

$$(p_1, \ldots, p_n) \underset{1}{\Rightarrow} (q) \tag{3}$$

$$(p_1, \ldots, p_n) \underset{2}{\Rightarrow} (q) \tag{4}$$

și vom presupune

$V_{III}((p_1, \ldots, p_n) \rightrightarrows (q)) = 1$ echivalent cu $(p_1, \ldots, p_n) \underset{2}{\rightrightarrows} (q)$, ceea ce înseamnă $V_{III}(p_1) \cap \ldots \cap V_{III}(p_n) \leqslant V_{III}(q)$, deci $(p_1, \ldots, p_n) \rightrightarrows (q)$, deci $\mu_1 p_1 \& \ldots \& \mu_1 p_n \Rightarrow \mu_1 q$ și $\mu_2 p_1 \& \ldots \& \mu_2 p_n \Rightarrow \mu_2 q$.

$V_{III}(p_1, \ldots, p_n) \rightrightarrows (q) \geqslant \frac{1}{2}$ echivalent cu $(p_1, \ldots, p_n) \underset{1}{\Rightarrow} (q)$, ceea ce înseamnă că $\mu_1 V_{III}(p_1) \cap \ldots \cap \mu_1 V_{III}(p_n) \leqslant \mu_1 V_{III}(q)$, deci că $(\mu_1 p_1, \ldots, \mu_1 p_n) \Rightarrow (\mu_1 q)$.

Teoremă

$$V_{III}((p) \rightrightarrows (q)) = V_{III}(p \rightarrow q).$$

§2. Indiscernabilitatea identicilor

Să considerăm o identitate trivalentă $=$ și un predicat trivalent A compatibil cu clasificarea care-i corespunde lui $=$.

Să reamintim că conectorul echivalență între două propoziții trivalente are matricea

$\leftrightarrow$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

deci, dacă $V_{\text{III}}(p) \geqslant \frac{1}{2}$ și $V_{\text{III}}(q) \geqslant \frac{1}{2}$ sau are $V_{\text{III}}(p \to q) \geqslant \frac{1}{2}$.

Dacă $V_{\text{III}}(a = b) = 1$, atunci $a \equiv_2 b$, deci $a \equiv_1 b$. Dacă $V_{\text{III}}(A(a)) = 1$, atunci $a \in \mathbf{a}_2$, deci $b \in \mathbf{a}_2$, deci $V_{\text{III}}(A(b)) = 1$ și, reciproc, dacă $V_{\text{III}}(A(b)) = 1$, atunci $V_{\text{III}}(A(a)) = 1$; dacă $V_{\text{III}}(A(a)) = \frac{1}{2}$, atunci $a \in \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, deci $a \in \mathbf{a}_1$, deci $b \in \mathbf{a}_1$; dacă am avea $b \in \mathbf{a}_2$ ar trebui să avem $a \in \mathbf{a}_2$, deci $b \notin \mathbf{a}_2$, deci $b \in \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, deci $V_{\text{III}}(A(b)) = \frac{1}{2}$; dacă $V_{\text{III}}(A(b)) = 0$, atunci $a \notin \mathbf{a}_1$; dacă am avea $b \notin \mathbf{a}_1$ ar trebui să avem $a \in \mathbf{a}_1$, deci $b \notin \mathbf{a}_1$, deci $V_{\text{III}}(A(\mathrm{b})) = 0$. În cele trei cazuri $V_{\text{III}}(A(a)) = V_{\text{III}}(A(b))$, deci $V_{\text{III}}(A(a) \leftrightarrow A(b)) = 1$.

Dacă $V_{\text{III}}(a = b) \geqslant \frac{1}{2}$, atunci $a \equiv_1 b$. Dacă $V_{\text{III}}(A(a)) \geqslant \frac{1}{2}$, atunci $a \in \mathbf{a}_1$, deci $b \in \mathbf{a}_1$, deci $V_{\text{III}}(A(b)) \geqslant \frac{1}{2}$, deci $V_{\text{III}}(A(a)) \leftrightarrow A(b) \geqslant \frac{1}{2}$ Dacă $V_{\text{III}}(A(a)) = 0$, atunci

$a \notin \mathbf{a}_1$, deci $b \in \mathbf{a}_1$, căci $b \in \mathbf{a}_1$ ne-ar da $a \in \mathbf{a}_1$, deci $V_{III}(A(b)) = 0$, deci $V_{III}(A(a) \leftrightarrow A(b)) = 1$.

Deci

$$V_{III}(a = b) \leqslant V_{III}(A(a) \leftrightarrow A(b)). \tag{*}$$

Aceasta este forma principiului de indiscernabilitate al identicilor.

§3. Incluziunea nuanțată și identitatea nuanțată ale mulțimilor nuanțate

În logica bivalentă incluziunea

$$a \subset b$$

a două mulțimi este definită prin: pentru oricare x

$$V_{III}((x \in a) \rightarrow (x \in b)) = 1.$$

În logica trivalentă vom defini două relații:

$$\mathfrak{A} \subset_1 \mathfrak{B} \tag{1}$$

care înseamnă: pentru oricare x

$$V_{III}((x \varepsilon \mathfrak{A}) \rightarrow (x \varepsilon \mathfrak{B})) \geqslant \frac{1}{2} \tag{2}$$

și

$$\mathfrak{A} \subset_2 \mathfrak{B} \tag{3}$$

care înseamnă: pentru oricare x

$$V_{III}((x \varepsilon \mathfrak{A}) \rightarrow (x \varepsilon \mathfrak{B})) = 1. \tag{4}$$

Matricea lui $\rightarrow$

$\rightarrow$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1,

arată că (4) are loc dacă pentru oricare x

$$V_{III}(x \varepsilon \mathfrak{A}) \leqslant V_{III}(x \varepsilon \mathfrak{B}). \qquad (5)$$

Dacă $\mathfrak{A} = < \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 >$, $\mathfrak{B} = < \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 >$, atunci, dacă $x \in \mathbf{a}_2$ avem $V_{III}(x \varepsilon \mathfrak{A}) = 1$, deci $V_{III}(x \varepsilon \mathfrak{B}) = 1$, deci $x \in \mathbf{b}_2$, deci $\mathbf{a}_2 \subset \mathbf{b}_2$ şi dacă $x \in \mathbf{a}_1$ avem $V_{III}(x \varepsilon \mathfrak{A}) \geqslant \frac{1}{2}$ deci $V_{III}(x \varepsilon \mathfrak{B}) \geqslant \frac{1}{2}$, deci $x \in \mathbf{b}_1$, deci $\mathbf{a}_1 \subset \mathbf{b}_1$. Deci *relaţia* (3) *echivalează cu*

$$\mathbf{a}_1 \subset \mathbf{b}_1 \quad \text{şi} \quad \mathbf{a}_2 \subset \mathbf{b}_2.$$

Condiţia (2) are loc dacă

$$V_{III}(x \varepsilon \mathfrak{A}) = 0 \text{ sau dacă } V_{III}(x \varepsilon \mathfrak{B}) \geqslant \frac{1}{2}, \qquad (7)$$

deci dacă

$$x \notin \mathbf{a}_1 \text{ sau dacă } x \notin \mathbf{b}_1,$$

deci *relaţia* (1) *echivalează cu*

$$\mathbf{a}_1 \subset \mathbf{b}_1. \qquad (8)$$

Relaţia de incluziune trivalentă între două mulţimi nuanţate

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \qquad (9)$$

va avea trei valori

$$V_{III}(\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}) = 1 \text{ dacă } \mathbf{a}_1 \subset \mathbf{b}_1 \text{ şi } \mathbf{a}_2 \subset \mathbf{b}_2,$$

$$V_{III}(\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}) = \frac{1}{2} \text{ dacă } \mathbf{a}_1 \subset \mathbf{b}_1 \text{ şi } \mathbf{a}_2 \not\subset \mathbf{b}_2.$$

Se va introduce, de asemenea, identitatea trivalentă

$$\mathfrak{A} \approx \mathfrak{B}$$

între două mulţimi nuanţate, definită prin

$$V_{III}(\mathfrak{A} \approx \mathfrak{B}) = 1 \text{ dacă } \mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1 \text{ şi } \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2,$$

$$V_{III}(\mathfrak{A} \approx \mathfrak{B}) = \frac{1}{2} \text{ dacă } \mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1 \text{ şi } \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2.$$

Definiţii analoage pot fi date în cazul polivalent.

§4. Un prim „paradox" al identității în logica modală sau polivalentă

Să plecăm de la formulele

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)) \quad (1)$$

$$\mu_1(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\mu_1 p \rightarrow \mu_1 q) \quad (2)$$

$$(\mu_1\mu_2 p) \Leftrightarrow (\mu_2 p) \quad (3)$$

şi de la legile identităţii

$$a = a \quad (4)$$

$$(a = b) \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)). \quad (5)$$

Formula (3) dă

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (\mu_1 p \rightarrow (\mu_1 q \rightarrow \mu_1 r)), \quad (6)$$

deci (5) dă

$$\mu_1(a = b) \rightarrow (\mu_1 A(a) \rightarrow \mu_1 A(b)). \quad (7)$$

Să luăm ca predicat $A(z)$ predicatul $\mu_2(c = z)$, unde c este un individ; (7) dă

$$\mu_1(a = b) \rightarrow (\mu_1\mu_2(c = a) \rightarrow \mu_1\mu_2(c = b)) \quad (8)$$

deci, cu (3)

$$\mu_1(a = b) \rightarrow (\mu_2(c = a) \rightarrow \mu_2(c = b)). \quad (9)$$

Formula (1) dă

$$\mu_2(c = a) \rightarrow \mu_1(a = b) \rightarrow \mu_2(c = b), \quad (10)$$

ceea ce, luînd a pentru c

$$\mu_2(a = a) \rightarrow (\mu_1(a = b) \rightarrow \mu_2(a = b)). \quad (11)$$

Or, conform teoremei I avem

$$\mu_2(a = a),$$

deci (11) dă

$$\mu_1(a = b) \rightarrow \mu_2(a = b).$$

Cu proprietatea II din cap.XIII, §8

$$(\mu_2 p) \Rightarrow (\mu_1 p),$$

deci

$$\mu_2(a = b) \rightarrow \mu_1(a = b),$$

obţinem

$$\mu_1(a = b) \Leftrightarrow \mu_2(a = b),$$

deci *orice propoziţie de egalitate este chrisipiană.*

Care este originea acestei dificultăţi?

Să considerăm clasificarea $(\equiv_2, \equiv_1)$ în care

$$a \equiv_1 b,$$

$$a \equiv_2 b$$

înseamnă

$$\mu_1(a = b),$$

$$\mu_2(a = b).$$

Predicatul $P(z)$ care este $\equiv_2 (c = z)$ nu este compatibil cu această clasificare, deoarece mulţimea $P(z)$ care este $< c \equiv_2 z,\ c \equiv_2 z >$ nu este compatibilă cu această clasificare, căci

dacă $a \equiv_2 b$

şi $P(a)$,

atunci

$$c \equiv_2 a,$$

deci

$$c \equiv_2 b,$$

deci

$$P(b);$$

dar, dacă $a \equiv_1 b$

şi $P(a)$,

atunci $c \equiv_2 a,$

deci nu avem întotdeauna

$$c \equiv_2 b.$$

În acest fel, acest „paradox” al identității provine din faptul că cele două predicate trivalente chrisipiene $P'(z)$ și $P''(z)$ care sînt $< c \equiv_2 z,\ c \equiv_2 z >$ și $< z \equiv_2 c,\ z \equiv_2 c >$ nu sînt compatibile cu relația de identitate nuanțată $< \equiv_2,\ \equiv_1 >$.

Această dificultate se prezintă nu numai în logica trivalentă, ci și în logica polivalentă sau θ-valentă. Ea se întîlnește de asemenea în logica modală a lui Lewis.

§5. Al doilea „paradox” al identității în logica modală sau polivalentă

Iată forma acestui paradox, așa cum a fost ea dată de Quine.

Să considerăm cele două stele

M : steaua de dimineață (*Morning Star*),

S : steaua de seară (*Evening Star*)

care sînt planeta Venus și relația „≡” care înseamnă identitate materială, deci propozițiile

$$M \equiv S,$$

$$\mu_2(M \equiv M),$$

$$\mu_2(S \equiv S)$$

sînt adevărate, în timp ce

$$\mu_2(S \equiv M)$$

nu este adevărată, dar

$$N\mu_2(S \equiv M)$$

este adevărată. Deci propozițiile

există un x astfel încît $(x \equiv S)\ \&\ \mu_2(x \equiv M)$, (*)

există un y astfel încît $(y \equiv S)\ \&\ N\mu_2(y \equiv M)$ (**)

sînt adevărate, deoarece putem lua pentru $x : M$ şi pentru $y : S$

$$(M \equiv S) \ \& \ \mu_2(M \equiv M),$$

$$(S \equiv S) \ \& N\mu_2(S \equiv M).$$

Or, dacă x care satisface (*) este diferit de y care satisface (**), deoarece

$$\mu_2(x \equiv M),$$

$$N\mu_2(y \equiv M),$$

deci există *două obiecte* x şi y care sînt material identice cu M; în acest fel numărul indivizilor este dublat.

Pentru a înţelege acest paradox, trebuie să remarcăm că $a \equiv b$ nu este decît o schemă care nu poate fi adevărată sau falsă. Pentru a-i atribui valori logice, trebuie să introducem cele patru valori logice din cap.II, §1 :

$V_{IV}(p) = 1$ dacă p este necesar adevărată,

$V_{IV}(p) = \frac{2}{3}$ dacă p este adevărată într-un mod eventual,

$V_{IV}(p) = \frac{1}{3}$ dacă p este falsă într-un mod eventual.

Relaţia „$a \equiv b$" identitate materială, are loc dacă $V_{IV}(a = b) \geqslant \frac{2}{3}$

Avem

$$V_{IV}(M \equiv M) = V_{IV}(S \equiv S) = 1,$$

$$V_{IV}(M \equiv S) = \frac{2}{3}$$

există un x astfel încît $\left\{\left[V_{IV}(x = S) = \frac{2}{3}\right] \& \left[V_{IV}(x = M) = 1\right]\right\}$,

există un y astfel încît $\left\{\left[V_{IV}(y = S) = 1\right] \& \left[V_{IV}(y = M) = \frac{2}{3}\right]\right\}$

pentru că, luînd pentru x individul M și pentru y individul S, avem

$$\left[V_{IV}(M = S) = \frac{2}{3}\right] \& [V_{IV}(M = M) = 1],$$

$$[V_{IV}(S = S) = 1] \& \left[V_{IV}(S = M) = \frac{2}{3}\right].$$

Deci x și y sînt diferiți din moment ce $V_{IV}(x \equiv M) = 1$, $V_{IV}(y \equiv M) = \frac{2}{3}$ dacă „ $\equiv$ " satisface condiția de tranzitivitate (15) de la cap. III.

$$V_{IV}(x = y) \geqslant \min\ (V_{IV}(x = M),\ V_{IV}(y = M),$$

deci $V_{IV}(x = y) \geqslant \frac{2}{3}$ deci x și y sînt egali într-un mod eventual. Obiectele: *Morning star* și *Evening star* sînt diferite dacă este vorba despre evenimente, adică de imagini fotografice sau pe retină la o anumită oră dintr-o anumită zi clasificate urmînd o clasificare cu trei nivele $\mu_1(x = y)$, $\mu_2(x = y)$, $\mu_3(x = y)$; $x = y$ nu este o propoziție chrisipiană, ci o propoziție nuanțată formată de tripletul

$$<\mu_3(x = y),\ \mu_2(x = y),\ \mu_1(x = y)>.$$

NOTE BIBLIOGRAFICE

Lucrările asupra *logicilor cu mai multe valori* sînt destul de numeroase. O bibliografie a fost publicată la pp. 762—790 ale cărţii noastre *Essais sur les logiques non chrysippiennes* (820 pp.) Editions de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie, Bucarest, 1972. (Ediţia Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti, 1972.)

II.

Pentru *logica modală* sau *logica implicaţiei stricte* vezi:

C. I. Lewis, C. H. Lanford, *Symbolic Logic*, Dover Publications Inc.

R. Feys, *Modal Logic,* Nauwelaerts Louvain, 1965.

G. H. von Wright, *An essay in modal logic,* Amsterdam, 1951.

G. E. Hughes, M. J. Creswell, *An introduction to modal logic,* Methuen and Co. Ltd., 11 New Felter Lane, London E C 4.

David Makinson, *Aspectes de la logica modal.* Notas de logica matematica. Instituto de Matematica. Universidad Nacional del Sur, Bahia Blanca, Argentina.

III.

Noţiunea de *fuzzy set* (expresia pe care am tradus-o prin mulţime nuanţată) este datorată lui L. Zadeh. Iată o încercare de bibliografie:

E. W. Adams, *Elements of theory of inexact measurement,* Philosophy of Sciences, XXXII (1968), p. 205.

R. Bellman, R. Kalaba, L. A. Zadeh, *Abstraction and patter recognition,* J. Math. Analysis and Applic., XIII (1966), p. 1.

M. Black, *Reasoning with loose concepts,* Dialogue II (1963), p. 1.

J. G. Brown, *Fuzzy sets on boolean lattices*, Report 1957, Bull. Research Labor. Aberdeen, Maryland, January 1969.

J. G. Brown, *A Note on Fuzzy Sets*, Inform. and Control, XVIII (1971), pp. 32—39.

C. L. Chang, *Fuzzy topological spaces*, Journal Math. Analysis and Applic., XXIV (1968), pp. 182—190.

C. L. Chang, *Fuzzy algebras, Fuzzy functions and their Applications to Fuzzy Approximations.* Division of Computer Research and Technology, National Institute of Health, Bethesda M D 1971.

J. A. Goguen, *Categories of L-sets.*

J. A. Goguen, *Representing inexact concepts*, I.C.R. Quarterly Repport, The University of Chicago, The Institute for Computing Research 20 (1969) 1. III. A.L.

J. A. Goguen, *L-fuzzy sets*, Journal of Math. An. and Appl., XVIII (1967), pp. 145—147.

J. A. Goguen, *Categories of fuzzy sets. Application to non Cantorian Set Theory*. Ph. D. Dissertation, University of California Berkeley Dept. of Mathematics, May 1968.

J. A. Goguen, *The logic of inexact concepts*, Synthese, vol. 19 (1969), pp. 325—373.

J. A. Goguen, *Categorical foundations for general system analyses.*

J. A. Goguen, *The fuzzy Tychonoff theorem*, I.C.C. Quarterly Repport 26 august 1970, The University of Chicago, The Institute of Computing Research.

J. A. Goguen, *L-fuzzy sets*, Naval Research Report under contracts 222 (85) NRO 49—170 and 3656 (08) NR 314—103.

P. N. Marinos, *Fuzzy logic and its application to swithching systems*, IEEE Trans. Computers EC—18 (1969), pp. 343—348.

M. Nas, N. Honda, *Fuzzy events realised by finite probabilistic automate*, Inform. and Control 12 (1968), p. 284.

A. Paz, *Fuzzy functions, probabilistic automate and their approximation by non probabilistic automate*, Journal Computer and System Science I (1967), pp. 371—390.

C. I. Richard, Chin Liang Chang, *Some properties of fuzzy logic*, Inform. and Control, XIX (1971), p. 417.

Eugene Santos, *Fuzzy algorithms*, Inform. and Control XVII (1970), p. 326.

D. Tsichritzis, *Fuzzy properties and almost solvable problems*, Ph. Dissertation, Princeton University Dept. of Electrical Engineering, September 1968.

L. Zadeh, *Optimality and non scalar valued performance criteria*, IEEE Transactions on Automatic Control, AC—8 (1863), p. 315.

L. Zadeh, *Fuzzy sets*, Inform. and Control, 8 (1965), pp. 338—353.

L. Zadeh, *Fuzzy sets and systems,* Proc. Symp. on Systems Theory. Polith. Institute of Brooklin, 20—22 april 1965, pp. 29—39.

L. Zadeh, *Shadows of fuzzy sets,* Problems in Transmission of Information, 2 (1966), pp. 37—44.

L. Zadeh, *Fuzzy algorithms,* Inform. and Control, XII (1968), pp. 94—102.

L. Zadeh, *Toward fuzziness in computer systems. Fuzzy algorithms and languages,* 1969 july 30. Preprint Dept. of Electrical Eng. and Computer Science, University of California, Berkeley.

L. Zadeh, *Toward a theory of fuzzy systems,* ERL Report 62—2. Electronic Research Laboratorium University of California Berkeley, june 1969; *Aspects of networks and system theory.* Ed. par A. E. Kalman, N. De Claris Publ. Hold Renhard and Wiesen 1971, p. 469.

L. Zadeh, *Quantitative fuzzy semantics,* Inform. Sciences III (1971), pp. 159—176.

L. Zadeh, *Similarity relations and fuzzy orderings,* Inform. Science III (1971), pp. 177—200.

Observații asupra relațiilor între *fuzzy sets* și logicile cu mai multe valori se găsesc în cartea noastră, citată mai sus, la pp. 56—98, 99—103, 152—156, 157—163, 186—188.

IV.

Iată o schiță bibliografică a lucrărilor de algebră care se referă la relațiile de echivalență.

Garrett Birkhoff, *On the structure of abstract algebras,* Proceeding Cambridge Phil. Soc. XXIX (1933), p. 29.

Garrett Birkhoff, *Lattice theory,* Amer. Math. Soc., 1948.

A. Châtelet, *Algèbre des relations de congruence,* Ann. de l'Ecole Normale Supérieure III^e s. LXIV (1947), p. 339, care citează un articol al autorului din Revue Scientifique, 1974.

P. Dubreil, *Algèbre,* Paris, Gauthier-Villars, 1946.

Paul Dubreil et Marie Louise Dubreil-Jacotin, *Théorie algébrique des relations d'équivalence,* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, IX s., tome XVIII (1939), p. 63. Această lucrare a fost precedată de două note la Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris, t. 205 (1937), pp. 704 și 1349.

M. L. Dubreil-Jacotin et R. Croisot, *Equivalences régulières dans un ensemble ordonée,* Bull. de la Société Mathématique de France, t. LXXX (1952), p. 11.

L. F. Epstein, *A function related to the series for exp (exp x),* Journal of Math. and Phys. XVIII (1939), p. 153.

J. Hartmanis, *Symbolic analysis of a decomposition of information processing machines,* Information and Control III (1960), p. 154.

J. Hartmanis, *Lattice theory of generalized partitions,* Canadian Journal of Math., XI (1959), p. 97.

V. S. Krishnan, *Binary relations congruences and homomorfisms,* Journal Madras University B XVI (1943), p. 16.

Oystein Ore, *Theory of equivalence relations,* Duke mathematical Journal IX (1942), p. 573.

E. Tomas Schmidt, *Kongruenz relationen algebraischer Structur,* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969.

Al. Solian, *Le treillis des relations d'équivalence dans un ensemble et le treillis des sous-groupes d'un groupe de transformations du même ensemble,* Bull. Math. de la Société des Sciences Mathématiques et Physiques de la République Populaire Roumaine VII (LV), p. 51 (1963).

I. Tomescu, *Methodes combinatoires dans la théorie des automates finis in Logique-automatique-informatique,* Editions de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie, 1971. (Voir cap. III, p. 347).

V.

Pentru echivalența informațională

Aravind K. Joshi, *Informationally equivalent sentences,* comunicare făcută la „Informational Conference on Microwavex, C Circuit, theory and Information Theory", care a avut loc la Tokio, în septembrie 1964.

Nu cunoaștem articolul:

C. Lewy, *Equivalence and identity,* Mind n.s. LV (1946), p. 223, decît din recenzia din Journal of Symbolic Logic XII (1949), p. 92.

VI.

Pentru identitatea eventuală a se vedea discuția și bibliografia foarte întinsă dată în cap. XI al cărții lui G. E. Haghes și M. J. Cresswell, citată în §II al acestei *Note.*

SUMMARY

This book is a new approach (based on many valued logics) of the theory of fuzzy sets. It is shown that a fuzzy set, in the sense of L. Zadeh, is the extension of a predicate in a many valued logic. A mathematical theory of fuzzy sets is developped in this way.

The motivation of this approach is given in the judgements used in linguistics and, generally, in the humanities. The workers in the humanities rarely use notions for which there exists a decision procedure for the assertions $a \in A$ or $a \notin A$. The logical foundation of these judgements is the model for the theory developped in this book.

This book will be of value to mathematicians (pure and applied), philosophers, linguists, workers in the humanities, computer scientists.

CUPRINS

CONTENTS